НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ

Скуратовський Р. В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА З ПРИКЛАДАМИ І ЗАДАЧАМИ

Підручник

Київ – 2021

Рекомендовано до друку Вченою радою
Національної академії управління (протокол № 8 від 28.12.2021).

Рецензенти:

Салімов Руслан Радікович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу. Інститут математики НАН України.

Кліщук Богдан Анатолійович – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник відділу комплексного аналізу і теоріх потенціалу. Інститут математики НАН України.

Скуратовський Р. В.
Вища математика з прикладами і задачами. Підручник. – К.: Національна академія управління, 2021. – 232 с.

Підручник містить ретельно відібрані і систематизовані теоретичні поняття, широкий набір практичних навчальних прикладів, задач для самостійного розв'язання, рисунків, схем тощо. Він розроблений для студентів галузь знань 07 Управління та адміністрування та 12 Інформаційні технології. В книзі викладено як теоретичні відомості так і методи розв'язку основних типів задач з багатьма прикладами. Всі теми супроводжуються варіантами завдань для контрольних і самостійних робіт.

Передмова

Навчальний посібник «**Вища математика**» створено автором на основі лекцій, які читав автор для студентів різних університетів зі спеціальностей **«Комп’ютерні науки, системний аналіз, прикладна математика і інформаційні системи і технології»** протягом багатьох років, а також матеріалів однойменного дистанційного курсу за напрямами 7.0913 (122, 113) «Компютерні науки та обчислювальна техніка», «Прикладна математика».

Цей посібник є складовою *навчально-методичного комплексу*, який містить навчальний посібник, практикум, збірник типових розрахункових ро біт, збірник тестових завдань.

Посібник охоплює матеріал з вищої математики відповідно до програми підготовки бакалаврів інженерно-технічних спеці-

альностей «ІКІТ» за темами: матриці та визначники; системи лінійних алгебричних рівнянь; векторна алгебра та лінійні простори; комплекс ні числа; геометрія прямої і площини; криві та поверхні 2-го порядку.

Посібник містить ретельно відібрані і систематизовані теоретичні поняття, широкий набір практичних навчальних прикладів, задач для самостійного розв’язання, рисунків, схем тощо.

Застосування відповідних математичних понять окремо проілюстровано на широкому спектрі прикладів економічного та технічного змісту.

Матеріал посібника викладено на двох рівнях: *базовому* і *розширеному. Базовий* рівень містить означення, формулювання теорем, коментарі до них; методи розв’язання задач, проілюстровані прикладами; застосування математичних понять і методів. *Розширений* рівень доповнює базовий уточненими формулюваннями, додатковими фактами, доведеннями теорем,

які наведені у тексті дрібним шрифтом і не є обов’язковими. Крім того, посібник містить:

— *тест для самоконтролю*;

— *перелік екзаменаційних питань*;

— *історичні відомості*;

— *список використаної і рекомендованої літератури.*

Сподіваємось, що цей навчальний посібник буде корисним як для студентів очної, заочної та дистанційної форм навчання НАУ,

так і для студентів інших навчальних закладів природничого та педагогічного напрямів.

Зміст

I. Лінійна алгебра

I семестр

Список умовних позначень

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Δ_i – визначник матриці отриманої з основної матриці шляхом заміни i-го стовпця основної матриці на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора b.

A^T – матриця транспонована до матриці A.

Основні поняття

1.1 Матриці

Означення. ***Матрицею порядка*** m на n називають прямокутну таблицю чисел, яка складається з m рядків і n стовпців. Загальний вигляд:

.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Також така матриця позначається як A_{mn}. Число a_{ij} називається елементом матриці. Числа i та j позначають відповідні i-тий рядок і j-тий стовпець, в яких цей елемент знаходиться.

Таким чином матриці бувають ***прямокутні*** $m \times n$ і ***квадратні*** $n \times n$. Про квадратні матриці розмірності $n \times n$ кажуть, що вони мають ***порядок*** n.

Приклад ***прямокутної матриці*** $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Трикутною матрицею називають матрицю виду

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Дві матриці A і B розмірності $m \times n$ називаються рівними тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ для всіх $i, j: \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$.

Контрольне запитання:

Якщо число рядків матриці дорівнює числу стовпців, то як називається така матриця?

Головною діагоналлю квадратної матриці

$$\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{array}\right)$$

називають діагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Квадратна матриця називається ***верхньо-трикутною***, якщо всі елементи цієї матриці, які знаходяться нижче головної діагоналі рівні нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі елементи цієї матриці, які знаходяться не на головній діагоналі, рівні нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Приклад діагональної матриці порядку n.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{nn} \end{array}\right)$$

Якщо всі елементи діагональної матриці рівні між собою, то таку матрицю називають ***скалярною***:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right)$$

Якщо елементи діагональної матриці рівні одиниці, то таку матрицю називають одиничною, якщо нулю – нульовою.

Операція транспонування позначається символом "Т", що вказується після позначення матриці у верхньому регістрі, наприклад A^{T}.

Очевидно, якщо вихідна матриця A мала розмір m×n, то транспонована матриця A^{T} буде розміром $n \times m$. Матриця-рядок в результаті транспонування перетворюється на матрицю-стовпець і навпаки. Неважко побачити, що $A_{ij}^{T} = A_{ji}$. Наприклад

Наприклад

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ і}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, для отримання транспонованої матриці достатньо кожен рядок вихідної матриці записати у вигляді стовпця результуючої, дотримуючись порядку прямування елементів.

Отже, транспонована матриця — матриця A^{T}, що виникає з матриці A в результаті унарної операції транспонування: заміни її рядків на стовпчики. Формально, транспонована матриця $A^T = (b_{ij})$ для матриці $A = (a_{ij})$ визначається як

$$b_{ij} = a_{ij} \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,m}.$$

У лінійній алгебрі операція транспонування є проміжною дією, яка робить зручніше виконання складніших матричних перетворень, що мають власну логіку.

У аналізі даних операція транспонування застосовується до таблиць з даними, у результаті стовпці таблиці стають рядками, а рядки — стовпцями.

Означення. Квадратна матриця M називається *кососиметричною*, якщо $M = -M^T$, де M^T – матриця транспонована відносно матриці M. Іншими словами це квадратна матриця, у якої елементи симетричні відносно головної діагоналі, протилежні по знаку, тобто $a_{ij} = -a_{ji}$, зокрема $a_{ii} = 0$.

Тобто це матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots a_{2n} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица-рядок (або вектор-рядок):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Матрица-стовпець (або вектор-стовпець):

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Помітимо, що матриця-рядок дорівнює транспонованій матриці-стовпцю і дорівнює:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ \mathrm{a}_{n1} \end{pmatrix}^T.$$

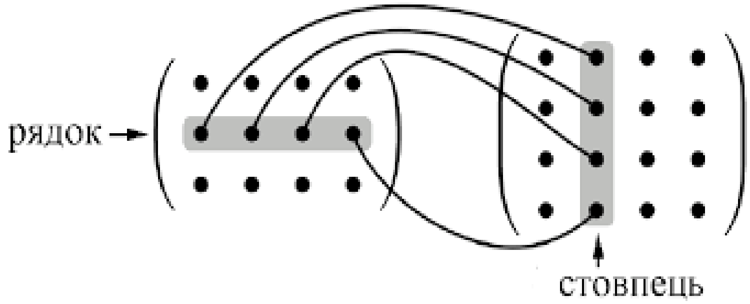


Рис. 1.

Трапеційовидна матриця:

$$\left(\begin{array}{ccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1k} & a_{1k+1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{2k} & a_{2k+1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3k} & a_{3k+1} & a_{3n} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & a_{kk} & a_{kk+1} & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Означення. Дві матриці A і B називають рівними, якщо вони одного розміру та їхні відповідні елементи рівні між собою $a_{ij} = b_{ij}$.

1.2 Дії над матрицями

Додавання матриць:

$$\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc:c} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ \hdashline b_{m1} & b_{m2} & b_{mn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc:c} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{2n}+b_{2n} \\ \hdashline a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{mn}+b_{mn} \end{array}\right).$$

Властивості операції додавання:

$A + B = B + A$, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

Множення матриці на число:

$$\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array}\right) \cdot \lambda = \left(\begin{array}{cc:c} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{2n} \\ \hdashline \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{mn} \end{array}\right).$$

Множення матриць

Множення матриць — це бінарна операція, яка використовуючи дві матриці, утворює нову матрицю, яка називається добутком матриць. Дійсні або комплексні числа множаться відповідно до правил елементарної арифметики. З іншого боку, матриці є масивами чисел, тому існують різні способи визначити добуток матриць. Таким чином, загалом термін «матричне множення» означає різні способи перемноження матриць. Ключовими особливостями будь-якого матричного множення є: кількість рядків і стовпців, в початкових матрицях, і правило, як елементи матриць утворюють нову матрицю.

Нехай дано дві прямокутні матриці A і B розмірності $m \times n$ і $n \times q$ відповідно

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Тоді матриця C розмірністю $m \times q$ називається їх добутком:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{bmatrix},$$

де:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} \quad (i = 1, 2, \dots q).$$

Операція множення двох матриць здійсненна тільки в тому випадку, якщо число стовпців в першому співмножнику дорівнює числу рядків у другому; в цьому випадку говорять, що форма матриць узгоджена. Зокрема, множення завжди здійснимо, якщо обидва множники — квадратні матриці одного і того ж порядку. Слід зауважити, що з існування добутку $\boldsymbol{AB}$ зовсім не випливає існування добутку $\boldsymbol{BA}$.

Відомо, що **визначник** матриці при **транспонуванні** матриці не змінюється, відповідно якщо яка-небудь властивість доведена для рядків, то вона доведена й для стовпців.

Якщо переставити місцями два рядки (або два стовпці), то визначник збереже своє абсолютне значення, але змінить знак.

1.3 Числові характеристики матриць

1.3.1 Визначник матриці

Визначником [2] квадратної матриці порядку *n* (чи визначником порядку *n*) називається алгебраїчна сума усіх можливих добутків елементів матриці, що взяті по одному з кожного рядка та по одному з кожного стовпчика.

Для обчислення визначника підраховуємо алгебраїчну суму добутків елементів матриці. Кожен такий добуток $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n}$ береться зі знаком + , якщо індекси $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ утворюють **парну перестановку** [2], та зі знаком - , якщо індекси $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ утворюють **непарну перестановку**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{inv(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} .$$

В цілому таких добутків є $n!$

Схема Обчислення визначника 3-го порядку:

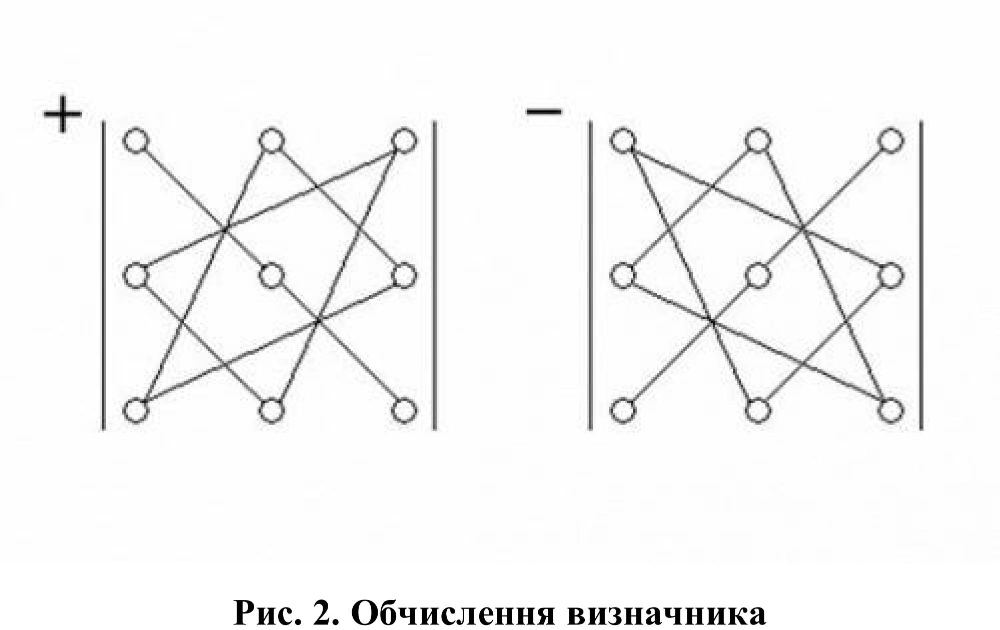


Рис. 2. Обчислення визначника

$$\det A_{3\times3} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Властивості визначника:

1. **Визначник** матриці при **транспонуванні** не змінюється, відповідно якщо яка-небудь властивість доведена для рядків, то вона доведена й для стовпців.
2. Якщо змінити місцями два рядки (або два стовпці), то визначник збереже своє абсолютне значення, але змінить знак.
3. Лінійна властивість визначника: Нехай дано рядки (стовпці) $a_1, a_2, ..., a_n$. Сума добутків цих рядків (стовпців) на довільні числа називається лінійною комбінацією рядків (стовпців). Якщо j-й стовпець (i-ий рядок) є комбінацією стовпців (рядків) $a_1, a_2, ..., a_k$, тобто є виразом / являє собою вираз $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$, то визначник цієї матриці дорівнює сумі визначників $\alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + ... + \alpha_k \Delta_k$, де Δ_l отримується з вихідного визначника заміною j-го стовпця (i-ого рядка) стовпцем (рядком) a_l.

Для доведення розглянемо випадок, коли j-й стовпець є лінійною комбінацією двох стовпців:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha a'_{1j} + \beta a''_{1j} & a_{1j+1} & a_{1j+2} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \alpha a'_{2j} + \beta a''_{2j} & a_{2j+1} & a_{2j+2} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \alpha a'_{nj} + \beta a''_{nj} & a_{nj+1} & a_{nj+2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{1j} & a_{1j+1} & a_{1j+2} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{2j} & a_{2j+1} & a_{2j+2} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a'_{nj} & a_{nj+1} & a_{nj+2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a''_{1j} & a_{1j+1} & a_{1j+2} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a''_{2j} & a_{2j+1} & a_{2j+2} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a''_{nj} & a_{nj+1} & a_{nj+2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

.

4. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.
5. Якщо рядок (стовпець) помножити на будь-яке/довільне число, то і визначник множиться на це ж число.
6. Якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
7. Якщо всі елементи одного з рядків (стовпців) дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю.
8. Якщо до будь-якого рядка (стовпця) додати інший рядок (стовпець), помножений на будь-яке/довільне число, то визначник не зміниться.
9. Сума добутків елементів одного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

10. Визначник одиничної матриці рівний одиниці: $\det(A)=1$.

Контрольні запитання

1. Чому рівний визначник матриці з двома рівними рядками (стовпцями)?

Елементарні перетворення матриці

Елементарними перетвореннями матриці називаються:

1. Перестановка двох рядків (стовпців) матриці місцями.
2. Множення рядків (стовпців) матриці на довільне число, яке не дорівнює нулю.
3. Додавання одного рядка (стовпця) матриці до іншого, помноженого на скаляр не рівний 0, рядка (стовпця).

   Зауважимо, що ці перетворення зберігають *еквівалентність* матриць [1, 2].

   Теорема Гаусса: Довільну ненульову матрицю за допомогою елементарних перетворень можна привести до трапецієподібної форми.

1.3.2 Системи лінійних рівнянь і метод Крамера

- **Означення. Системою з m алгебраїчних лінійних рівнянь з n невідомими** називається сукупність рівнянь, у кожному з яких є невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наявні у першій степені:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа a_{ij} $\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n} \right)$ - коефіцієнти при невідомих, i - номер рівняння, j - номер невідомої, b_i - вільні члени.

- **Розв’язком СЛАР** називається впорядкований набір значень невідомих

$$\boxed{X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right)},$$

який при підстановці в кожне рівняння системи замість невідомих відповідно $\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n}$ обертає їх у вірні рівності.

- **Розв’язати СЛАР** – це значить **вказати всі розв’язки** системи, тобто є такі набори значень невідомих, які обертають рівняння системи в тотожності.

Система лінійних рівнянь називається:

а) **сумісною**, якщо вона має хоч би один розв’язок;

б) **несумісною**, якщо вона не має розв’язків;

в) **визначеною**, якщо вона має один розв’язок;

г) **невизначеною**, якщо вона має нескінчену множину розв’язків;

д) **однорідною**, якщо всі вільні члени равні нулю $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$;

е) **неоднорідною**, якщо існує $b_i\neq 0$.

Метод Крамера розв’язку систем лінійних рівнянь

Правило (метод) Крамера застосовується до систем, у яких <u>число рівнянь рівне числу невідомих. Цей метод використовує визначники.</u>

Дамо коротке теоретичне обґрунтування цього методу. Метод Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь із n змінними

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \qquad (1.3.2.1)$$

над полем F. Позначимо через A основну матрицю цієї системи: $A = \|\alpha_{ik}\|$.

Теорема: якщо $|A| \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь має единий розв'язок, що виражається у формулах

$$x_1 = |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} + \ldots + \beta_n A_{n1}), \ldots \qquad (1.3.2.2)$$
$$\ldots, x_n = |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} + \ldots + \beta_n A_{nn}),$$

Доведення. Покладаючи, що $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots . x_n = \alpha_n$ запишемо початкову систему у вигляді матричного рівняння

$$AX = b, \qquad (1.3.2.3)$$

рівносильного вищевказаній системі. Із умови, що $|A| \neq 0$ виходить, що рядки матриці А лінійно незалежні та системи (1.3.2.1) і (1.3.2.3) мають єдине рішення $X = A^{-1}b$. Звідси, оскільки $A^{-1} = |A|^{-1} A*$, де A^* – транспонована матриця з алгебраїчних доповнень, то отримуємо $A^1 b = |A|^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} \ldots A_{n1} \\ \ldots\ldots \\ A_{1n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} =$

$$|A|^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 A_{11} \ldots \beta_n A_{n1} \\ \ldots\ldots \\ \beta_1 A_{1n} \ldots \beta_n A_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A|^{-1}(\beta_1 A_{11} \ldots \beta_n A_{n1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ |A|^{-1}(\beta_1 A_{1n} \ldots \beta_n A_{nn}) \end{bmatrix}.$$

Із останньої рівності і слідують формули Крамера (1.3.2.2).

1.3.2.1 Системи з двома рівняннями і двома невідомими

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}}$$

Знайдемо відповідні до методу Крамера визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тут

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих;

$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ – це визначник, отриманий з визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при x на стовпець стовпець з коефіцієнтів вільного вектора $\vec{b}$ (стовпець вільних членів);

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ – це визначник, отриманий з визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при y на стовпець вільних членів.

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то **система сумісна і визначена**, тобто **має єдиний розв’язок, який знаходиться за формулами Крамера:**

$$\boxed{x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}}.$$

2. Якщо $\Delta=0$, але хоч би один з визначників Δ_x , Δ_y відмінний від нуля, то **система не має розв’язків (несумісна)**.

3. Якщо $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, то **система має нескінченно багато розв’язків (сумісна і не визначена)**.

Приклад 1. Розв’язати за допомогою метода Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases}2x-y=4,\\3x+4y=-5.\end{cases}$$

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot(-1)=11\neq0$, тому СЛАР має єдиний розв’язок.

$\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & -1\\-5 & 4\end{vmatrix}=16-5=11$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & -5\end{vmatrix}=-10-12=-22$.

Тоді $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{11}{11}=1$; $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-22}{11}=-2$.

Відповідь: система рівнянь **сумісна** і визначена, її єдиний розв’язок $X=(1;\ -2)$.

Приклад 2. Розв’язати за допомогою методу Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}.$$

Розв’язок

Визначник системи дорівнює нулю: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$, проте один із допоміжних визначників не дорівнює нулю: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0$, значить, СЛР не має розв’язків, тобто СЛР *несумісна*.

Ми також позначатимемо визначник матриці в якій зроблена заміна на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора $\vec{b}$ (стовпець вільних членів) як Δ_x, якщо зроблена заміна другого стовпця на стовпець з коефіцієнтів вільного вектора $\vec{b}$ – Δ_y, якщо зроблена заміна третього стовпця на вектор стовпець вільних членів $\vec{b}$ – Δ_z.

Приклад 3. Розв’язати за допомогою методу Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 9x + 15y = 12. \end{cases}$$

Розв’язок

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Тому система має *нескінченно багато розв’язків*.

Розділивши коефіцієнти 2-го рівняння на 3, отримаємо:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ 3x + 5y = 4 \end{cases}$$

Залишимо тільки одно із цих рівнянь: $3x+5y=4$.

Виразимо y через x: $\boxed{y=\frac{4-3x}{5}}$, значення x - будь-яке дійсне число. Це і є вираз для **спільного розв’язку** СЛАР. Відповідь можна записати так: $\boxed{X=\left(x;\ \frac{4-3x}{5}\right),\text{ де } x\in R}$.

Надаючи x різні значення, будемо отримувати нескінчену множину *часткових розв’язків*. Наприклад, при $x=3$ отримаємо $y=\frac{4-9}{5}=-1$ і перший частковий розв’язок $(3;\,-1)$. При $x=-7$ отримаємо $y=\frac{4+21}{5}=5$ і другий частковий розв’язок $(-7;5)$, і так далі.

1.3.2.2 Системи з трьома рівняннями трьома невідомими

Розглянемо СЛР

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3. \end{cases}$$

Обчислюються визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система **має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:**

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}}.$$

2. Якщо $\Delta = 0$, а хоч би один з визначників Δ_x , Δ_y, Δ_z відмінний від нуля, то **система не має розв'язків**.

3. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система **має нескінченно багаго розв'язків.**

Приклад 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x \qquad + 2z = -1 \\ \qquad y - z = 1 \end{cases}.$$

Складемо визначние з коефіцієнтів при невідомих і обрахуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 0 - 0 - 2 - 1 = -2 \neq 0,$$

значить, СЛР має єдиний розв'язок.

Знайдемо допоміжні визначники і значення невідомих.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 1 = -2, \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{-2} = 0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Відповідь: Система сумісна і визначена, єдиний розв'язок $X = (x;\ y;\ z) = (1;\ 0; -1)$.

Розглянемо приклад, у якому ***СЛАР має нескінчено багато розв'язків***, і вони будуть знайдені з використанням формул Крамера.

Приклад 5. Розв'язати СЛР

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язок

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Зауважимо, що третє рівняння системи дорівнює сумі перших двох рівнянь, тобто залежить від перших двох рівнянь.

Відкинувши третє рівняння, отримаємо рівносильну систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Залишивши у лівій частині системи ті невідомі, коефіцієнти при яких утворюють визначник, який не дорівнює нулю.

Наприклад, коефіцієнти при x_1 і x_2 утворюють визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$
.

Тому залишимо у лівій частині рівнянь доданки з x_1 і x_2, а доданки з x_3 перенесемо у праву частину з протилежним знаком.

Невідоме x_3 назвемо *вільним*, а невідомі x_1 і x_2 - *базисними невідомими*.

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3, \\ x_1 \qquad = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

і застосуємо до неї правило Крамера:

Визначник основної матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -x_3 & 1 \\ -1-2x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-1)(-1-2x_3) = 1 + 2x_3$$. Тому маємо розвязок

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1+2x_3}{1} = 1 + 2x_3.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ 1 & (-1-2x_3) \end{vmatrix} = -1 - 2x_3 - (-x_3) = -1 - x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1-x_3}{1} = -1 - x_3.$$

Виразимо загальний розв**'**язок у вигляді вектора

$$\boxed{X = (1+2x_3,\ -1-x_3,\ x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}}$$

Це загальний розв'язок невизначеної СЛАР, де x_3 – вільна змінна, яка набуває будь-яких дійсних значень.

Із загального розв'язку можна отримати ***часткові розв'язки***, якщо надати вільній змінніій яке-небудь конкретне значення з області визначення системи.

Наприклад, нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 3$, $x_2 = -2$; тоді частковий розв’язок $X = (3, -2, 1)$. І так далі.

А якщо надати вільній змінній x_3 значення -1, то отримаємо інший частковий розв’язок $X = (-1, 0, -1)$.

Метод Гауса — Жордана розв’язку систем СЛАР

Метод Гауса — Жордана використовується для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), знаходження оберненої матриці, знаходження координат вектора у заданому базисі, відшукання рангу матриці. Метод є модифікацією методу Гауса, який також застосовується для розв’язання СЛАР.

Алгоритм

1. Обирається перша зліва колонка, що містить хоч одне ненульове значення.
2. Якщо верхнє число у цій колонці - нуль, то переставляють увесь перший рядок матриці з іншим рядком матриці, де у цій колонці немає нуля.
3. Усі елементи першого рядка діляться на верхній елемент обраної колонки.
4. Від рядків, що залишились, віднімається перший рядок, помножений на перший елемент відповідного рядка, з метою отримання нуля в першому елементі кожного рядка (крім першого).
5. Далі, повторюємо ці операції із матрицею, отриманою з початкової матриці після викреслювання першого рядка та першого стовпчика.
6. Після повторення операцій n-1 разів отримаємо верхню трикутну матрицю.

7. Віднімаємо від передостаннього рядка останній рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, щоб у передостанньому рядку залишилась лише 1 на головній діагоналі.
8. Повторюємо попередній крок для наступних рядків. У результаті отримуємо одиничну матрицю і розв'язок на місці вільного вектора (над ним необхідно виконувати ті самі перетворення).

Приклад. Розв'язати задачу використовуючи метод Гауса. Нехай маємо сукупність векторів $\overline{a}_1 = (1,\ 3,\ 1)$, $\overline{a}_2 = (2,\ 1,\ 1)$, $\overline{a}_3 = (3,\ -1,\ 1)$. Перевірити на залежність цю сукупність векторів.

Обчислимо визначник матриці, складеної із координат векторів

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 9 - 3 + 1 - 6 = 0\,.$$

Отже, дана сукупність векторів є лінійно залежною.

Щоб встановити цю залежність запишемо систему однорідних рівнянь, породжену рівністю $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + k_3\overline{a}_3 = 0$:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Необхідно знайти хоча б один ненульовий розв'язок системи рівнянь, яка має безліч розв'язків $|A| = 0$. Для знаходження розв'язку скористаємось методом Гауса. Для цього запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній розширеній матриці системи відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ \qquad k_2 + 2k_3 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Отримали систему двох рівнянь з трьома невідомими. У цьому випадку невідома k_3 є незалежною, може приймати довільні числові значення. Дві інші невідомі k_1, k_2 залежать від невідомої k_3 та визначаються через неї рівностями $k_2 = -2k_3$, $k_1 = k_3$. Ми називаємо k_3 вільною змінною. Якщо взяти $k_3 = 1$, то залежні змінні набудуть наступні значення $k_1 = 1,\ k_2 = -2$, тобто ми отримуємо таку залежність між векторами:

$$\overline{a}_1 - 2\overline{a}_2 + \overline{a}_3 = 0 \text{, або } \overline{a}_1 = 2\overline{a}_2 - \overline{a}_3 .$$

Контрольні питання

1. Запишіть загальний вид системи 2 лінійних рівнянь із трьома невідомими.
2. Що називається розв’язком СЛАР?
3. Що значить «розв’язати систему лінійних рівнянь»?
4. Які системи лінійних рівнянь називаються сумісними і несумісними?
5. За якої умови система n лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв’язок?
6. Запишіть формули Крамера для розв’язку системи лінійних рівнянь. В якому випадку вони можуть бути застосовані?
7. Як, знаючи загальний розв’язок, записати частковий розв’язок невизначеної системи?

1.3.3 Приклади розвя’зання задач з лінійної алгебри

для спец. Інформаційні системи і технології.

Приклад. Дана система линійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

1. Виписати основну матрицю коефіцієнтів A і вільний вектор b СЛАР

Розв’язок

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Порахувати визначник матриці A методом її розкладу за рядком і за стовпцем.

Розв’язок

Розкладемо за четвертим рядком, оскільки він містить 0 і одиничні коефіцієнти

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&4&-5\\1&1&5&2\\2&1&3&2\\1&0&1&4\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}1\begin{vmatrix}3&4&-5\\1&5&2\\1&3&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\cdot 1\begin{vmatrix}2&3&-5\\1&1&2\\2&1&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}4\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&5\\2&1&3\end{vmatrix}=$$

$$=-(3\cdot 5\cdot 2+1\cdot 4\cdot 2-1\cdot 3\cdot 5+1\cdot 5\cdot 5-3\cdot 3\cdot 2-1\cdot 4\cdot 2)-$$

$$-(2\cdot 1\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2-1\cdot 1\cdot 5+2\cdot 1\cdot 5-1\cdot 2\cdot 2-1\cdot 2\cdot 3)+$$

$$+4(2\cdot 1\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+1\cdot 1\cdot 4-2\cdot 1\cdot 4-2\cdot 1\cdot 5-1\cdot 3\cdot 3)=19$$

Відповідь: 19.

3. Знайти розв'язок СЛАР за формулами Крамера.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&3&4&-5\\7&1&5&2\\4&1&3&2\\4&0&1&4\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}3&4&-5\\1&5&2\\1&3&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}0&3&-5\\7&1&2\\4&1&2\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}0&3&4\\7&1&5\\4&1&3\end{vmatrix}=$$

$$=-(30+8-15+25-28-8)-(0+24-35+20-0-42)+4(0+60+28-16-63-0)=-19$$
;

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&0&4&-5\\1&7&5&2\\2&4&3&2\\1&4&1&4\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}7&5&2\\4&3&2\\4&1&4\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}1&7&2\\2&4&2\\1&4&4\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot(-5)\cdot\begin{vmatrix}1&7&5\\2&4&3\\1&4&1\end{vmatrix}=$$

$$=2(84+40+8-24-14-80)+4(16+14+16-8-8-56)+5(4+21+40-20-12-14)=19$$
;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(42 + 0 - 20 + 35 - 24 - 0) - 4(4 + 12 - 5 + 10 - 4 - 6) + 4(8 + 42 + 0 - 0 - 14 - 12) = 19;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(60 + 28 + 0 - 0 - 63 - 16) - (8 + 42 + 0 - 0 - 14 - 12) + 4(6 + 30 + 4 - 8 - 10 - 9) = 19$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = -1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1; \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{|A|} = 1;$$

Відповідь: (-1,1,1,1).

4. Зайти розв’язок СЛАР методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

Розв’язок

Запишемо розширену матрицю СЛАР і перетворимо її

$$.\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -13 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & -7 & -17 \end{array}\right) \sim .$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & -19 \end{array}\right)$$

Звідси маємо

$$x_4 = \frac{-19}{-19} = 1;$$
$$x_3 = \frac{4 - 5 \cdot 1}{-1} = 1;$$
$$x_2 = \frac{3 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{1} = 1;$$
$$x_1 = \frac{4 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = -1.$$

Відповідь: (-1,1,1,1).

5. Знайти ранг матриці *A*?

Розв’язок: Оскільки визначник матриці *A* відмінний від 0, то її ранг співпадає з її порядком, тобто рівний 4.

Відповідь: 4.

6. Обчислити обернену матрицю A^{-1}.

Розв’язок: Знайдёмо обернену матрицю методом алгебраїчних доповнень.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 19$

Випишемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&5&2\\1&3&2\\0&1&4\end{vmatrix}=12+2-2-20=-8$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&5&2\\2&3&2\\1&1&4\end{vmatrix}=-(12+10+4-6-2-40)=22$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&1&2\\1&0&4\end{vmatrix}=4+2-2-8=-4$$

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&1&5\\2&1&3\\1&0&1\end{vmatrix}=-(1+3-5-2)=3$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&4&-5\\1&3&2\\0&1&4\end{vmatrix}=-(36-5-6-16)=-9$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&4&-5\\2&3&2\\1&1&4\end{vmatrix}=24+8-10+15-4-32=1$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3&-5\\2&1&2\\1&0&4\end{vmatrix}=-(8+6+5-24)=5$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2&3&4\\2&1&3\\1&0&1\end{vmatrix}=2+9-4-6=1$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&4&-5\\1&5&2\\0&1&4\end{vmatrix}=60-5-6-16=33$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -(40+8-5+25-4-16) = -48$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8+6+5-12 = 7$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2+15-4-3) = -10$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(30+8-15+25-18-8) = -22$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20+16-15+50-12-8 = 51$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+12-5+10-4-6) = -11$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6+30+4-8-10-9 = 13$$

Випишемо матрицю, транспоновану до матриці алгебраїчних доповнень:

$$A^T = \begin{pmatrix} -8 & -9 & 33 & -22 \\ 22 & 1 & -48 & 51 \\ -4 & 5 & 7 & -11 \\ 3 & 1 & -10 & 13 \end{pmatrix}$$

Поділивши A^T на *det A,* отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{-9}{19} & \frac{33}{19} & \frac{-22}{19} \\ \frac{22}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-48}{19} & \frac{51}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{5}{19} & \frac{7}{19} & \frac{-11}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-10}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix}$$

7. Знайти розв’язок СЛАР за допомогою оберненої матриці A^{-1}.

Розв’язок: Покладемо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Тоді систему можна переписати у вигляді $AX=b$. Її розв’язком буде вектор стовпець $X=A^{-1}b$. Маємо

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-8}{19} & \frac{-9}{19} & \frac{33}{19} & \frac{-22}{19} \\ \frac{22}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-48}{19} & \frac{51}{19} \\ \frac{-4}{19} & \frac{5}{19} & \frac{7}{19} & \frac{-11}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{1}{19} & \frac{-10}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: (-1,1,1,1).

Для спец. Компютерні науки

Дано СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ 4x_3 = \ 5 \\ x_1 + \ \ x_2 \ + \ 5x_3 = \ 5 \\ 2x_1 - x_2 \ \ + \ 3x_3 = \ 0. \end{cases}$$

1. Виписати матрицю коефіцієнтів A і вільний вектор b СЛАР

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Обчислити визначник матриці A методом її розкладу за рядком і за стовпцем.

Розв'язок

Розкладемо визначник за першим рядком

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 16 + 21 - 12 = 25$$

3. Знайти розв'язок СЛАР за формулами Крамера.

Розв'язок

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 20 + 25 - 45 = -25$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 30 + 50 - 40 - 15 = 25$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 30 - 5 - 10 + 10 = 25$$

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = -1, \quad y = \frac{\Delta_2}{|A|} = 1, \quad z = \frac{\Delta_3}{|A|} = 1.$$

Відповідь: (-1,1,1).

5. Зайти розв’язок СЛАР методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв’язок

Запишемо розширену матрицю СЛАР і перетворимо її

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -25 & -25 \end{array}\right)$$

Звідси

$$x_3 = \frac{-25}{-25} = 1$$

$$x_2 = \frac{-5 + 6 \cdot 1}{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = -1$$

Відповідь: (-1,1,1).

5. Яким є ранг матриці *A*?

Розв’язок: Оскільки визначник матриці *A* відмінний від 0, то її ранг співпадає з її порядком, тобто рівний 3.

Відповідь: 3.

6. Обчислити обернену матрицю A^{-1}.

Розв’язок: Знайдемо обернену матрицю методом алгебраїчних доповнень.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$det\, A = 25$

Випишемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Випишемо матрицю, транспоновану до матриці алгебраїчних доповнень:

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 11 \\ 7 & -2 & -6 \\ -3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Поділивши A^* на $\det A$, отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} & \frac{-13}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-2}{25} & \frac{-6}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{8}{25} & \frac{-1}{25} \end{pmatrix}$$

7. Знайти розв’язок СЛАР за допомогою оберненої матриці A^{-1}.

Розв’язок: Покладемо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Тоді систему можна переписати у вигляді $AX=b$. Її розв’язком буде вектор стовпець $X=A^{-1}b$. Маємо

$$X = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} & \frac{-13}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-2}{25} & \frac{-6}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{8}{25} & \frac{-1}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: (-1,1,1).

2. Завдання для МКР і самостійних робіт

Визначники матриць

Задача 1.1 Обчислити визначник матриці

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix},$$

якщо коефіцієнти матриці приймають наступні значення:

№ варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}
1	-3	-2	4	4	-4	3	-4	5	-1	-2	-4	1	2	-4	2	-5
2	-2	-5	1	5	-1	-1	4	1	2	5	-3	1	4	3	-2	-2
3	3	-2	-2	5	-4	1	-4	-5	3	-3	-3	-3	3	1	5	2
4	3	4	1	-4	-2	4	4	-5	2	1	1	3	-3	1	4	2
5	-3	4	3	1	1	-1	-1	2	-4	4	1	2	-2	3	2	4
6	-4	-2	-1	-3	-1	-4	1	2	1	2	-5	-3	-5	-4	-2	3
7	3	-3	3	4	4	-2	2	3	3	5	1	-4	-4	1	5	1
8	1	1	4	-3	3	-4	5	-1	-4	1	2	-5	-3	-2	3	-1
9	1	3	-3	5	2	2	-1	-5	-5	-3	-1	-4	1	1	-1	-4
10	-5	-5	-3	5	-4	1	1	1	2	-5	1	-2	4	3	5	-2
11	-5	-2	-2	1	1	-5	4	5	-3	3	4	1	3	-2	-1	-4
12	-2	-1	1	2	3	3	1	-1	-5	5	-3	4	-2	2	1	-1
13	-1	1	3	4	-5	1	1	1	-5	-4	2	5	-4	3	-5	-2
14	-2	-3	-1	-2	-5	-5	5	-2	4	2	-1	2	3	1	-2	3
15	-4	5	-3	3	-3	1	-5	2	2	-4	-4	3	-5	3	1	4

Задача 1.2 Знайти обернену матрицю для матриці ***D***

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

якщо коефіцієнти матриці приймають наступні значення:

№ варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	-3	4	-4	-2	-4	1	4	3	-1
2	-4	-4	-5	1	2	-2	2	-5	-5
3	5	4	5	1	1	-3	-1	2	1
4	3	1	-2	-2	3	5	-2	-2	-4
5	-4	-3	3	1	-3	1	3	-3	5
6	1	-1	4	3	-4	4	4	-2	-5
7	1	-3	2	1	-1	4	1	4	-3
8	1	-1	4	2	-1	4	1	2	1
9	-2	3	1	3	5	-1	2	-4	-3
10	-4	-1	-3	1	2	1	2	-5	-4
11	3	-3	4	1	3	-2	3	4	2
12	3	1	5	5	-4	1	1	5	-2
13	1	1	-1	4	-4	-4	-3	5	4
14	-5	3	1	-3	-1	3	-2	1	-3

№ варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
15	1	-5	-1	2	-5	-4	-1	-3	1

Задача 1.3. Дослідити та розв’язати систему рівнянь [1]. Знайти загальний та часткоий розв’язки.

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = B_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 = B_3, \end{cases}$$

якщо

№ варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	B_1	B_2	B_3
1	3	1	-3	6	1	-2	-1	2	4	6	-4	8	12	-3	30
2	4	12	3	-8	-1	-3	5	2	10	30	-4	-20	-1	6	-14
3	1	-1	-1	-2	2	-2	-2	2	9	-9	-9	0	1	8	27
4	-2	2	-2	4	5	-2	5	-10	-12	6	-12	24	-10	16	-42
5	-3	3	3	3	-2	2	-4	2	10	-10	2	-10	-15	-4	38
6	2	-2	-2	3	-1	1	1	2	-4	4	4	1	6	11	16
7	-1	-2	-1	2	5	2	5	-10	-13	-10	-13	26	-10	18	-66
8	1	1	5	-1	2	2	1	-2	1	1	-4	-1	18	0	-18
9	1	1	-2	-3	5	5	-10	2	-8	-8	16	-10	0	17	-34
10	-2	-4	4	4	-3	-1	6	6	2	-6	-4	-4	-8	-7	-2
11	-3	-6	2	-9	-1	-2	-3	-3	5	10	4	15	15	-6	-3
12	1	-1	3	-3	5	-5	15	-4	-11	11	-33	11	-7	-13	33
13	-4	-1	4	4	3	-2	-3	-3	2	-5	-2	-2	5	-12	-19
14	5	5	-1	15	1	1	-4	3	13	13	5	39	19	0	57
15	-4	-4	-12	-1	1	1	3	5	-9	-9	-27	-7	-10	12	-32

Задача 1.5

Розкласти вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ за векторами базису $\overline{a_1} = (A_{11}, A_{12}, A_{13})$, $\overline{a_2} = (A_{21}, A_{22}, A_{23})$, $\overline{a_3} = (A_{31}, A_{32}, A_{33})$.

Задачу слід розв’язати методом Жордана-Гаусса.

№ варіанта	x_1	x_2	x_3	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	-25	-20	3	-3	4	-4	-2	-4	1	4	3	-1
2	22	-8	-21	-3	5	4	4	-3	-2	-2	-5	1
3	-19	-10	-1	4	1	4	1	-3	3	2	1	-2
4	9	-7	-6	5	-4	-5	4	-3	-1	2	1	-5
5	-6	-3	-15	3	2	4	1	1	-1	5	3	-4
6	-13	4	-13	-3	1	-5	-1	1	1	1	-4	-3
7	-1	-6	8	1	1	2	3	-1	-4	2	-1	4
8	-1	22	-13	2	2	3	2	-3	4	1	-5	5
9	7	-23	10	2	-5	1	-1	-3	-2	2	-5	3
10	-10	-8	-19	-3	-5	-2	-2	2	-2	1	1	-3
11	23	10	-16	5	-2	4	5	1	-3	1	1	1
12	-8	13	-26	4	1	2	-1	-4	5	3	4	4
13	-19	13	7	-3	2	-5	5	-1	-3	2	-5	1
14	0	-19	-7	1	5	1	3	-4	-4	-5	-5	-3
15	11	-2	27	2	-2	5	-5	4	-2	1	1	5

Задача 1.6

Знайти власні числа і цілочисельні власні вектори матриці А:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

якщо її елементи набувають наступних значень

№ варіанта	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	A_{33}
1	2	1	1	1	4	1	1	1	2
2	2	1	1	1	2	1	1	1	4
3	3	1	1	1	5	1	1	1	3
4	3	1	1	1	3	1	1	1	5
5	4	1	1	1	6	1	1	1	4
6	4	1	1	1	4	1	1	1	6
7	5	1	1	1	7	1	1	1	5
8	5	1	1	1	5	1	1	1	7
9	6	1	1	1	8	1	1	1	6
10	6	1	1	1	6	1	1	1	8
11	7	1	1	1	9	1	1	1	7
12	7	1	1	1	7	1	1	1	9
13	8	1	1	1	10	1	1	1	8
14	8	1	1	1	8	1	1	1	10
15	9	1	1	1	11	1	1	1	9

Задача 2.3

Крива другого порядку задана рівнянням:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

Визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння і побудувати в старій системі координат

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
1	1	-2	3	-1	0	1
2	3	-1	3	2	2	-4
3	5	12	-1	2	-2	-1
4	0	-3	0	0	1	3
5	-5	-2	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
6	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-2
7	1	-1	1	-2	-3	3
8	3	1	3	3	-1	-5
9	4	-2	1	6	-3	9
10	1	0	0	3	-4	1
11	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
12	7	2	2	-20	-16	5
13	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	-1	3
14	1	-1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
15	2	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	1	0
16	1	4	4	-3	-1	1
17	1	1	1	1	1	-4

18	8	0	-3	1	$-\frac{5}{2}$	1
19	1	-1	2	-2	-3	29
20	9	-3	1	1	0	-7
21	1	-1	0	1	1	1
22	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-12
23	9	-6	4	-8	1	0
24	1	-1	1	-2	-3	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6
26	1	-1	-2	-2	-3	3
27	1	-1	1	1	-3	0
28	1	1	1	1	1	-4
29	9	-3	1	-3	1	0
30	1	0	1	-2	-3	0
31	0	0	2	4	6	-3
32	1	-2	4	1	-1	-1
33	5	6	0	-11	-6	-19
34	3	5	7	2	1	1
35	1	-1	2	-2	-3	3
36	3	-3	5	-2	-3	10
37	9	12	16	20	15	0
38	1	-1	-2	-2	-3	$-\frac{13}{3}$
39	3	1	-1	4	5	14
40	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
41	3	-2	4	-1	-2	2
42	1	3	9	2	6	-5

43	3	-1	3	2	2	-4
44	5	2	8	-16	-28	80
45	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
46	9	-2	6	3	-4	2
47	1	3	1	3	1	-1
48	5	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	1	-5
49	2	-2	5	-8	0	3
50	1	-1	2	-2	-3	3
1	1	-2	3	-1	0	1
2	3	-1	3	2	2	-4
3	5	12	-1	2	-2	-1
4	0	-3	0	0	1	3
5	-5	-2	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
6	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-2
7	1	-1	1	-2	-3	3
8	3	1	3	3	-1	-5
9	4	-2	1	6	-3	9
10	1	0	0	3	-4	1
11	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
12	7	2	2	-20	-16	5
13	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	-1	3
14	1	-1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
15	2	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	1	0

16	1	4	4	-3	-1	1
17	1	1	1	1	1	-4
18	8	0	-3	1	$-\frac{5}{2}$	1
19	1	-1	2	-2	-3	29
20	9	-3	1	1	0	-7
21	1	-1	0	1	1	1
22	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-12
23	9	-6	4	-8	1	0
24	1	-1	1	-2	-3	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6
26	1	-1	-2	-2	-3	3
27	1	-1	1	1	-3	0
28	1	1	1	1	1	-4
29	9	-3	1	-3	1	0
30	1	0	1	-2	-3	0
31	0	0	2	4	6	-3
32	1	-2	4	1	-1	-1
33	5	6	0	-11	-6	-19
34	3	5	7	2	1	1
35	1	-1	2	-2	-3	3
36	3	-3	5	-2	-3	10
37	9	12	16	20	15	0
38	1	-1	-2	-2	-3	$-\frac{13}{3}$
39	3	1	-1	4	5	14
40	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10

41	3	-2	4	-1	-2	2
42	1	3	9	2	6	-5
43	3	-1	3	2	2	-4
44	5	2	8	-16	-28	80
45	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
46	9	-2	6	3	-4	2
47	1	3	1	3	1	-1
48	5	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	1	-5
49	2	-2	5	-8	0	3
50	1	-1	2	-2	-3	3
51	0	1	3	1	-3	5
52	21	$\frac{1}{2}$	-10	0	0	0
53	1	-2	4	5	-10	25
54	1	2	4	-3	-3	0
55	4	-2	1	2	-1	1
56	1	1	1	-4	0	4
57	1	-1	-3	-2	-3	3
58	32	30	7	-8	-1	1
59	2	-3	5	-1	1	-10
60	0	5	-2	3	2	21
61	1	$\frac{5}{2}$	-14	0	0	0
62	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	-2	-12
63	1	-2	3	1	-1	0
64	2	-2	1	-1	3	-3

65	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
66	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
67	1	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	1
68	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
69	9	-6	2	-4	0	0
70	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
71	5	12	-1	2	0	1
72	2	2	-3	-1	1	-2
73	3	1	3	3	-1	-5
74	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
75	3	-1	3	2	2	-4
76	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
77	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
78	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{4}$	-2
79	1	-1	-3	-2	-3	3
80	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
81	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	0
82	1	3	9	0	9	0
83	2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{2}$	18
84	1	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6

85	0	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{3}{2}$	-1
86	3	$-\frac{7}{2}$	2	-2	3	-5
87	1	2	-	-2	$-\frac{1}{2}$	4
88	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	-5
89	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
90	6	$-\frac{1}{2}$	0	-1	2	0
91	2	-2	5	-4	0	6
92	1	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
93	2	2	5	-4	0	6
94	1	-1	2	-2	-3	3
95	6	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
96	2	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
97	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
98	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
99	1	-1	1	-2	-3	3
100	3	$-\frac{7}{2}$	2	3	-2	-5
51	0	1	3	1	-3	5
52	21	$\frac{1}{2}$	-10	0	0	0
53	1	-2	4	5	-10	25
54	1	2	4	-3	-3	0
55	4	-2	1	2	-1	1

56	1	1	1	-4	0	4
57	1	-1	-3	-2	-3	3
58	32	30	7	-8	-1	1
59	2	-3	5	-1	1	-10
60	0	5	-2	3	2	21
61	1	$\frac{5}{2}$	-14	0	0	0
62	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	-2	-12
63	1	-2	3	1	-1	0
64	2	-2	1	-1	3	-3
65	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
66	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
67	1	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	1
68	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
69	9	-6	2	-4	0	0
70	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
71	5	12	-1	2	0	1
72	2	2	-3	-1	1	-2
73	3	1	3	3	-1	-5
74	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
75	3	-1	3	2	2	-4
76	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
77	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1

78	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{4}$	-2
79	1	-1	-3	-2	-3	3
80	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
81	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	0
82	1	3	9	0	9	0
83	2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{2}$	18
84	1	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
85	0	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{3}{2}$	-1
86	3	$-\frac{7}{2}$	2	-2	3	-5
87	1	2	-	-2	$-\frac{1}{2}$	4
88	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	-5
89	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
90	6	$-\frac{1}{2}$	0	-1	2	0
91	2	-2	5	-4	0	6
92	1	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
93	2	2	5	-4	0	6
94	1	-1	2	-2	-3	3
95	6	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
96	2	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
97	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3

98	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
99	1	-1	1	-2	-3	3
100	3	$-\frac{7}{2}$	2	3	-2	-5

3. Завдання для СРС

Завдання для самостійної роботи за темою “Визначники”.

Завдання 1. (6 балів)

Квадратна матриця M називається *кососиметричною*, якщо $M = -M^T$, де M^T – матриця транспонована відносно матриці M.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \vdots & \ldots a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \vdots & \ldots a_{2n} \\ \hdashline -a_{1n} & -a_{2n} & \vdots & \ldots\ 0 \end{pmatrix}$$

Нехай матриця A симетрична, матриця B кососиметрична. Відновити елементи матриць A та B, де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 5 & 1 & -4 \\ 2 & * & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & * & 3 \\ 4 & * & * \end{pmatrix}.$$

Завдання 2. (2 бали)

Який знак треба поставити перед доданком $a_{12}a_{24}a_{35}a_{43}a_{51}$ у формулі з означення визначника матриці розмірності (5×5).

Завдання для самостійної роботи за темою “Системи лінійних рівнянь“.

Дослідити на лінійну залежність систему векторів.

1.92.

$\bar{a} = \{1,\ 4,\ 6\},\ \bar{b} = \{1,\ -1,\ 1\},\ \bar{c} = \{1,\ 1,\ 3\}$

1.93.

$\overline{a} = \{2, -3, 1\},\ \overline{b} = \{3, -1, 5\},\ \overline{c} = \{1, -4, 3\}$

1.94.

$\overline{a} = \{5, 4, 3\},\ \overline{b} = \{3, 3, 2\},\ \overline{c} = \{8, 1, 3\}$

1.95.

$\overline{a} = \{1, 1, 1\},\ \overline{b} = \{0, 1, 1\},\ \overline{c} = \{0, 0, 1\}$

Знайти координати вектора $\overline{x}$ в базисі $\left(\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \overline{e_3'}\right)$, якщо він заданий в базисі $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$.

2.1.

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3} \\ \overline{e_2'} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2} \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3} \end{cases} \qquad \overline{x} = \{6, -1, 3\}$$

2.2.

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{3e_3} \\ \overline{e_2'} = \frac{3}{2}\overline{e_1} - \overline{e_2} \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3} \end{cases} \qquad \overline{x} = \{1, 2, 4\}$$

2.3.

$$\begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{4e_3} \\ \overline{e_2'} = \frac{4}{3}\overline{e_1} - \overline{e_2} \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3} \end{cases} \qquad \overline{x} = \{1, 3, 6\}$$

1.4 Додаткові розділи вищої алгебри

Розділ І. Різні арифметики для комплексних чисел (виду *a + bi)*

В системі комплексних чисел закони додавання і множення виражаються формулами:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\,, \tag{1}$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\,. \tag{2}$$

Спробуємо вивести нову систему чисел, зберігши правило додавання (1), але замінивши (2) іншим правилом множення. Нове множення має володіти наступними властивостями:

1) Множення дійсного числа *a* (*a = a+0i*) на довільне число $z=b+\tilde{n}i$ повинно давати той самий результат, що й у випадку комплексних чисел, тобто:

$$(a+0i)(b+ci)=ab+aci\,,$$

$$(b+ci)(a+0i)=ab+aci\,.$$

Зокрема, це означає, що для дійсних чисел нове множення має співпадати із звичайним:

$$(a+0i)(b+0i)=ab+0i\,.$$

Оскільки те саме правильно і у випадку додавання, то, таким чином дійсні числа входять в нову числову систему з їхньою природною арифметикою.

Наслідки з правил множенняі

2) **Ассоціативний закон**. Тобито повинна виконуватися рівність:

$$(az_1)\cdot(bz_2)=(ab)\cdot(z_1z_2)\,,$$

де a, b – довільні дійсні числа.

3) Повинен виконуватися **дистрибутивний закон**:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3,$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

З цих вимог слідує наступне:

$$(a+bi)(c+di) = a(c+di) + bi(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2.$$

Тепер задамо елемент i^2 так, щоб він належав даній системі чисел, тобто, щоб він мав вигляд $p + qi$. Отже, тепер остаточно сформовано вигляд закону множення:

$$(a+bi)(c+di) = (ac+bdp) + (ad+bc+bdq)i. \qquad (3)$$

Теорема

Будь-яка система чисел a + bi з правилами додавання та множення (1), (3) зводиться до однієї з трьох:

I) a + bi, $i^2 = -1$ (комплексні числа);

II) a + bi, $i^2 = 1$ (так звані подвійні числа);

III) a + bi, $i^2 = 0$ (так звані дуальні числа).

 З рівності $i^2 = p + qi$ слідує, що $i^2 - qi = p$ або:

$$\left(i - \frac{q}{2}\right)^2 = p + \frac{q^2}{4}. \qquad (4)$$

Можливі три випадки:

I. $p+\frac{q^2}{4}$ – від’ємне число, тобто $p+\frac{q^2}{4}=-k^2$, де *k* – відмінне від нуля дійсне число. Тоді

$$\left(i-\frac{q}{2}\right)^2=-k^2,$$

$$\left(-\frac{q}{2k}+\frac{i}{k}\right)^2=-1. \qquad (5)$$

Позначимо число в дужках через *J*, будемо мати:

$$J^2=-1.$$

При цьому $i=\frac{q}{2}+kJ$, тому будь-яке число *a + bi* може бути записане у вигляді

$$a+bi=a+b\left(\frac{q}{2}+kJ\right)=\left(a+\frac{b}{2}q\right)+bkJ;$$

тобто число *a + bi* допускає представлення у вигляді $a'+b'J$, де $J^2=-1$. Це означає, що фактично ми маємо справу з *комплексними числами* [8, 9].

II. . $p+\frac{q^2}{4}$ – додатне число, тобто $p+\frac{q^2}{4}=k^2$, ($k>0$). Тоді замість формули (5) отримаємо:

$$\left(-\frac{q}{2k}+\frac{1}{k}i\right)^2=1.$$

Позначивши число в дужках через *E*, матимемо:

$$E^2=1.$$

Таким чином, будь-яке число *a + bi* нашої системи допускає представлення у вигляді $a' + b'E$, де $E^2 = 1$. Закон множення таких чисел буде

$$(a' + b'E)(c' + d'E) = (a'c' + b'd') + (a'd' + b'c')E .$$

Отже, при $p + \frac{q^2}{4} > 0$ отримуємо *систему подвійних чисел*.

III. $p + \frac{q^2}{4} = 0$. В цьому випадку, позначивши через Ω число $i - \frac{q}{2}$, матимемо

$$\Omega^2 = 0.$$

Будь-яке число *a + bi* нашої системи може бути переписано у вигляді $\left(a + \frac{b}{2}q\right) + b\Omega$, тобто у вигляді $\widetilde{a} + \widetilde{b}\Omega$. Закон множення виглядає так:

$$(\widetilde{a} + \widetilde{b}\Omega)(\widetilde{c} + \widetilde{d}\Omega) = \widetilde{a}\widetilde{c} + (\widetilde{a}\widetilde{d} + \widetilde{b}\widetilde{c})\Omega .$$

Це – *система дуальних чисел*. ▯

Отже, будь-яка система чисел з правилами дій (1), (3) фактично є однією з трьох:

I) *комплексні числа* $a + bJ$, $J^2 = -1$;

II) *подвійні числа* $a + bE$, $E^2 = 1$;

III) *дуальні числа* $a + b\Omega$, $\Omega^2 = 0$.

Далі системи подвійних та дуальних чисел ми розглядати не будемо, оскільки в них не виконується ділення. Тож, перейдемо до розгляду систем з діленням, а саме таких, в які входять більше ніж одна уявна одиниця.

2 Розділ II. Кватерніони

Добре відомо, що група кватерніонів застосовується в квантових обчисленнях. Отже, розглянемо кватерніони і їх векторне представлення.

Розглянемо числа виду:

$$z = a + bi + cj\ ,$$

де *a,b,c* – довільні дійсні числа, а *i* та *j* – уявні одиниці. Як правило додавання для чисел такого вигляду приймається:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')\,j\ ,$$

що ж стосується правила множення, то потрібно, щоб:

1) для дійсних чисел нове множення співпадало із звичайним:

$$(a + 0i + 0\,j)(b + 0i + 0\,j) = ab + 0i + 0\,j\,;$$

2) Добуток дійсного числа $k = k + 0i + 0\,j$ на довільне число $z = a + bi + cj$ повинен дорівнювати $ka + kbi + kcj$.

3) Має виконуватись асоціативність множення:

$$(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1 z_2)\ ,$$

де *a* і *b* – довільні дійсні числа.

4) Має виконуватись дистрибутивний закон як у формі

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3\,,$$

так і в формі

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3\,.$$

Придумати закон множення, що задовольняє всі перераховані вимоги, не складає труднощів. Можна, наприклад, прийняти

$$(a+bi+cj)(a'+b'i+c'j)=aa'+(ab'+a'b)i+(ac'+a'c)j\,;$$

при такому правилі множення виконуються навіть комутативний та асоціативний закони ($z_1z_2=z_2z_1$ і $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$), але що явно відсутнє — так це можливість ділення! Наприклад, неможна поділити 1 на *i*: рівняння

$$(0+1i+0j)x=1+0i+0j$$

не має розв’язку.

І це не випадково. Можна показати, що при будь-якому правилі множення чисел $a+bi+cj$, яке задовольняє умови 1), 2), 3), 4) знайдеться принаймні одна пара чисел z_1, z_2 (причому $z_2\neq 0$) таких, що z_1 *не можна поділити на* z_2. Таким чином, з чисел виду $a+bi+cj$ побудувати систему з діленням неможливо!

Проте виявляється, що якщо приєднати ще один символ *k* і розглянути числа вигляду

$$a+bi+cj+dk\,, \qquad (1)$$

то можна отримати систему з діленням. Кажучи точніше, можна так ввести множення для чисел (1), щоб, окрім вимог 1), 2), 3), 4), виконувалася ще і зворотна для множення дія — ділення. Найбільш цікавим прикладом для такої системи є кватерніони («четверні» числа).

 Кватерніонами називають числа виду (1) з законом додавання

$$(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k)=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$$

і законом множення, що полягає у наступному:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1,$$

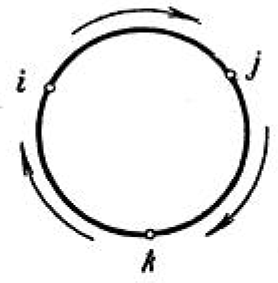


Рис. 3

$$jk = i, \quad kj = -i. \qquad (2)$$

Квадрат будь-якої уявної одиниці дорівнює -1, добуток двох різних уявних одиниць дорівнює третій з них із знаком „+”, якщо від першого множника до другого ми рухаємось за годинниковою стрілкою (рис. 1), і із знаком „–”, якщо – проти.

Множення довільних кватерніонів виконується за допомогою правил (2), та з урахуванням умов 1) – 3). Нехай

$$q = a + bi + cj + dk\ ,$$

$$q' = a' + b'i + c'j + d'k\ .$$

За правилом множення суми на суму (яке слідує з 3)), маємо

$$\begin{aligned} qq' = aa' + a(b'i) + a(c'j) + a(d'k) + (bi)a' + (bi)(b'i) + (bi)(c'j) + (bi)(d'k) + \\ + (cj)a' + (cj)(b'i) + (cj)(c'j) + (cj)(d'k) + (dk)a' + (dk)(b'i) + (dk)(c'j) + (dk)(d'k). \end{aligned}$$

Ми отримали суму з 16 доданків. Перетворюючи кожне з них за допомогою вимог 1), 2) і таблиці множення (наприклад, $(bi)(c'j) = bc'(ij) = bc'k$), отримуємо результат

$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + db' - bd')j + \\ + (ad' + da' + bc' - cb')k. \qquad (3)$$

Приклад

Нехай дано кватерніони $q_1 = 5 + 3i - j + k$ і $q_2 = 1 - i - j + 3k$. Знайдемо їх добуток:

$$q_1q_2 = (5 + 3i - j + k)(1 - i - j + 3k) = 5 - 5i - 5j + 15k + 3i - 3i^2 - 3ij + 9ik - j + ji + \\ + j^2 - 3jk + k - ki - kj + 3k^2 = 5 - 5i - 5j + 15k + 3i + 3 - 3k - 9j - j - k - 1 - 3i + k - \\ - j + i - 3 = (5 + 3 - 1 - 3) + (-5 + 3 - 9 - 3)i + (-5 - 9 - 1 - 1)j + (15 - 3 - 1 + 1)k = 4 - \\ -14i - 16j + 12k.$$

Отже, $q_1q_2 = 4 - 14i - 16j + 12k.$

2.1 Операції над кватерніонами та їх властивості

2.1.1 Асоціативний закон множення кватерніонів

Теорема 1

Для множення кватерніонів справджується асоціативний закон:

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)\,. \qquad (4)$$

 Оскільки кожний кватерніон q_α (α = 1, 2, 3) можна представити як суму чотирьох доданків ($q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k$), то ліва частина (4) дорівнює сумі 4×4×4 = 64 доданків виду

$$(u_1u_2)u_3\,, \qquad (5)$$

де u_1 – будь-який з чотирьох доданків кватерніона q_1, u_2 – будь-який з доданків q_2, u_3 – будь-який доданок q_3. Аналогічно права частина (4) дорівнює сумі 64 відповідних доданків

$$u_1(u_2u_3)\,. \tag{6}$$

Тому, якщо ми доведемо, що кожен доданок (5) дорівнює відповідному доданку (6), то цим рівність (4) буде доведено.

Отже, все зводиться до перевірки рівності (4), коли як q_1, q_2, q_3 фігурують (у будь-якій комбінації) кватерніони вигляду a, bi, cj, dk. При цьому, оскільки числовий множник можна виносити за знак добутку, то рівність (4) досить перевірити для випадків, коли q_1, q_2, q_3 — це будь-які з кватерніонів 1, i, j, k; наприклад, замість

$$((bi)(cj))(b'i) = (bi)((cj)(b'i))$$

досить довести

$$(ij)i = i(ji)\,.$$

В тих випадках, коли один з кватерніонів q_1, q_2, q_3 дорівнює 1, рівність (4) очевидна. Тому задача зводиться до перевірки цієї рівності для випадків, коли q_1, q_2, q_3 будь-які з кватерніонів i, j, k.

Всього, таким чином, підлягають перевірці 27 рівностей. Випишемо для прикладу деякі з них:

$$(ii)i = i(ii)\,, \qquad (ii)j = i(ij)\,, \qquad (ij)i = i(ji)\,, \qquad (ij)k = i(jk)\,.$$

Справедливість кожної з 27 рівностей слідує з таблиці множення (2).

Отже, множення кватерніонів має асоціативну властивість. ▯

2.1.2 Спряження кватерніонів

● ***Спряженим*** до кватерніона $q = a + bi + cj + dk$ називається кватерніон

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk\ . \qquad (7)$$

Властивості спряжених кватерніонів:

1) сумою спряжених кватерніонів є дійсне число;
2) добуток $q\overline{q}$ також є дійсним числом

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\ ; \qquad (8)$$

3) спряжене до суми дорівнює сумі спряжених

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q}_1 + \overline{q}_2\ ; \qquad (9)$$

4) спряжене до добутку дорівнює добутку спряжених, узятих у зворотному порядку

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q}_2 \overline{q}_1\ . \qquad (10)$$

Очевидно, що сумою спряжених кватерніонів є дійсне число. Але і добуток $q\overline{q}$ також є дійсним числом, що відразу ж випливає з формули (3) для множення:

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\ . \qquad (8)$$

 Нормою кватерніона *q* називають число

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\ ,$$

і позначати його $|q|$. Тоді:

$$q\overline{q} = |q|^2$$

— в точності така ж формула, що для комплексних чисел.

2.1.1 Ділення в системі кватерніонів

Для комплексних чисел часткою від ділення z_1 на z_2 називається розв'язок рівняння z_2x = z_1. Але для кватерніонів добуток залежить від порядку співмножників, тому замість одного рівняння потрібно розглядати два:

$$q_2 x_r = q_1 \qquad (11)$$

і

$$x_l q_2 = q_1 . \qquad (11')$$

▯ Розв'язок рівняння (11) називають ***лівою часткою*** від ділення q_1 на q_2 і позначають x_l, а розв'язок (11′) – ***правою часткою*** x_r (у випадку комплексних чисел, обидві частки збігаються).

Щоб розв'язати рівняння (11), помножимо обидві частини рівняння зліва на $\overline{q}_2$. Отримаємо $\overline{q}_2 q_2 x = \overline{q}_2 q_1$, або

$$|q_2|^2 x = \overline{q}_2 q_1 ;$$

Якщо тепер помножити обидві частини на дійсне число $\frac{1}{|q_2|^2}$, то матимемо

$$x = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q}_2 q_1 .$$

Безпосередньою підстановкою в рівняння (11) переконуємося, що цей вираз дійсно є розв'язком. Таким чином,

$$x_ё = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q}_2 q_1 .$$

Аналогічно знаходиться $x_{\text{п}}$, множимо обидві частини рівняння (11′) справа спочатку на $\overline{q}_2$, а потім на $\frac{1}{|q_2|^2}$:

$$x_{\text{ї}} = \frac{1}{|q_2|^2} q_1 \overline{q}_2 .$$

Приклад

Знайдемо ліві і праві частки від ділення *k* на *1+i+k*:

$$x_{\text{ё}} = \frac{1}{3}(1 - i - k)k = \frac{1}{3}(k + j + 1),$$

$$x_{\text{ї}} = \frac{1}{3}k(1 - i - k) = \frac{1}{3}(k - j + 1).$$

Отже, ми встановили дві найбільш важливі властивості системи кватерніонів:

1) для множення кватерніонів справедливий сполучний закон;

2) кватерніони - система з діленням.

3 Деякі застосування кватерніонів у векторній алгебрі

Відкриття кватерніонів в середині XIX століття дало поштовх різноманітним дослідженням в галузі математики та фізики. Зокрема, завдяки кватерніонам виникла надзвичайно плідна область математики - векторна алгебра.

2.1. Числова і векторна частини кватерніонів

Нагадаємо деякі положення, відомі з геометрії. Якщо ввести в звичайному просторі прямокутну систему координат і позначити через *i*, *j*, *k* вектори довжини 1, що виходять з початку координат і напрямлені вздовж координатних осей (рис. 2), то будь-яка сума виду

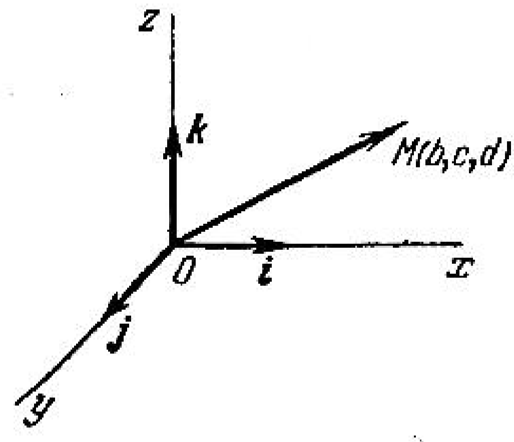


Рис. 4

$bi + cj + dk$,

де *b*, *c*, *d* – дійсні числа, буде представляти собою певний вектор. Цей вектор йде з початку координат в точку з координатами *b*, *c*, *d*.

Повертаючись до кватерніонів, зауважимо, що кожен кватерніон

$$q = a + bi + cj + dk$$

являє собою формально суму дійсного числа *a* з вектором $bi + cj + dk$.

 Число *a* називають ***числовою*** (або ***дійсною***) ***частиною***, а вираз $bi + cj + dk$ – ***векторною*** (або ***уявною***) ***частиною*** кватерніона *q*.

Розглянемо тепер два чисто векторних кватерніона

$$q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k \text{ і } q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k .$$

Перемножуючи їх за правилом множення кватерніонів, матимемо

$$q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k . \quad (1)$$

Випишемо окремо числову і векторну частини кватерніона q_1q_2.

Числова частина $q_1q_2 = -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)$. (2)

Векторна частина $q_1q_2 = (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k$. (3)

2.2. Скалярний добуток векторів які представляють кватерніони

Кожен з виразів (2), (3) має певний геометричний зміст. Сума $b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$ дорівнює $|q_1||q_2|\cos\varphi$, тобто добутку довжин векторів q_1 та q_2 (або модуль кватерніонів q_1 і q_2) на косинус кута між ними. Такий добуток доводиться розглядати в математиці досить часто; він носить спеціальну назву «скалярний добуток векторів q_1 та q_2» і позначається зазвичай (q_1, q_2). Таким чином, за означенням,

$$(q_1, q_2) = |q_1||q_2|\cos\varphi.$$

Теорема 1

Скалярний добуток векторів q_1 та q_2 дорівнює дійсній частині кватерніона q_1q_2, взятого із знаком „+”, тобто

$$(q_1, q_2) = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2. \qquad (4)$$

 На рис. 3 зображений трикутник, побудований на векторах q_1 і q_2. Одна з його вершин знаходиться в початку координат, дві інші вершини – точки M_1 і M_2 (кінці векторів q_1 і q_2), координати яких відповідно дорівнюють b_1, c_1, d_1 і b_2, c_2, d_2. Маємо

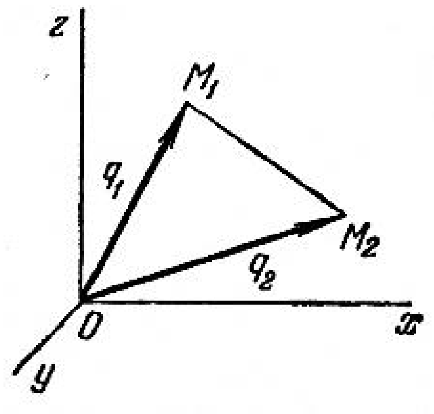


Рис. 5.

$$OM_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + d_1^2,$$

$$OM_2^2 = b_2^2 + c_2^2 + d_2^2,$$

$$M_1M_2^2 = (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2,$$

звідси

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2).$$

Але за відомою теоремою косинусів

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos\varphi,$$

де φ – кут при вершині *O* (кут між векторами q_1 і q_2). Порівнюючи рівності, отримуємо

$$OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos\varphi = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2,$$

що й треба було довести. ▯

Отже, дійсна частина добутку векторних кватерніонів q_1 і q_2 дорівнює взятому зі знаком мінус скалярному добутку q_1 на q_2.

Якщо вектори q_1 і q_2 перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$), тобто дорівнює нулю і дійсна частина добутку $q_1 q_2$. В такому випадку $q_1 q_2$ буде «чистим» вектором. Обернене, звичайно, теж правильне: якщо $q_1 q_2$ – «чистий» вектор, то скалярний добуток q_1 на q_2 дорівнює нулю, значить $\cos\varphi = 0$ і вектори q_1, q_2 перпендикулярні. Варто відмітити, що у випадку, коли q_1 і q_2 перпендикулярні, $q_1 q_2 = -q_2 q_1$; це одразу ж видно із формули (1), якщо врахувати, що дійсна частина $q_1 q_2$ дорівнює нулю.

2.3. Векторний добуток кватерніонів

Стосовно векторної частини добутку $q_1 q_2$, тобто виразу, що стоїть в правій частині рівності (3), то встановити її геометричний зміст дещо складніше. Цей вираз називають векторним добутком вектора q_1 на q_2 і позначають $[q_1, q_2]$:

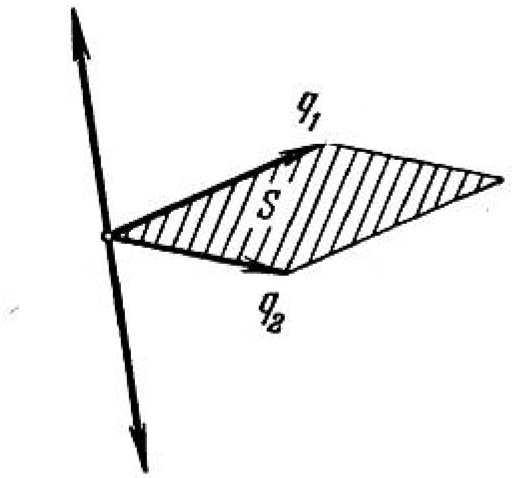
$$[q_1 q_2] = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k \,.$$

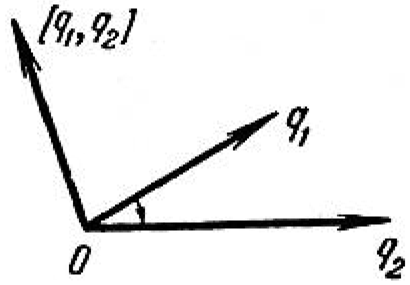
Теорема 2

Векторний добуток векторів q_1 та q_2 дорівнює уявній частині кватерніона $q_1 q_2$, тобто

$$[q_1 q_2] = (c_1 d_2 - d_1 c_2)i + (d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (b_1 c_2 - c_1 b_2)k \,.$$

Приймемо теорему без доведення.





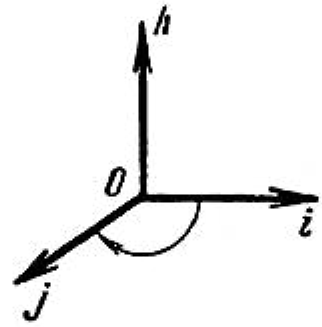


Рис. 7.

Рис. 6.

Виявлені властивості вектора [q_1, q_2]: перпендикулярність до q_1 і q_2, а також рівність його довжини S – ще не визначають його повністю; такі властивості мають рівно два взаємно протилежні вектори (рис. 4). Завершення опису вектора [q_1, q_2] полягає в наступному: вектори q_1, q_2, [q_1, q_2] орієнтовані у просторі як i, j, k.

Отже, якщо дивитись з кінця вектора [q_1, q_2] на площину векторів q_1 і q_2, то поворот на найменший кут від q_1 до q_2 буде представленим за тим самим напрямом (тобто за напрямом годинникової стрілки або проти), в якому з кінця вектора k видно поворот на найменший кут від i до j (рис. 5)).

Отже, для множення чисто векторних кватерніонів справедлива формула:

$$q_1 q_2 = -(q_1, q_2) + [q_1 q_2],$$

де (q_1, q_2) – скалярний, а $[q_1 q_2]$ – векторний добуток q_1 на q_2.

Операції скалярного і векторного множення (поряд з додаванням векторів і множенням вектора на число) лежать в основі цілого розділу математики – векторної алгебри, яка має численні додатки як в самій математиці, так і у фізиці (особливо в механіці).

2.4. Геометричний зміст множення довільного кватерніону на суто векторний кватерніон

Завдяки тому, що множення кватерніонів об'єднує в собі два види множення векторів (скалярний і векторний), кватерніони є чудовим засобом для розв'язання деяких задач геометрії та механіки.

Теорема 3. *Якщо p – будь-який вектор довжини 1, а v – довільний вектор, перпендикулярний p, то множення v зліва на кватерніон*

$$q = \cos\varphi + p\sin\varphi$$

здійснює поворот вектора v навколо осі p на кут φ.

 Нехай

$$q = a + bi + cj + dk$$

– довільний кватерніон, модуль якого дорівнює 1:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\,.$$

Запишемо, що

$$q = a + q'\,,$$

Де q' це вектор $bi + cj + dk$. Оскільки $\left|a^2\right| + \left|q'\right|^2 = 1$, то існує такий кут φ, що

$$a = \cos\varphi\,, \qquad \left|q'\right| = \sin\varphi\,.$$

Очевидно, $q' = |q'|p$, де *p* – вектор довжини 1. Отже,

$$q = \cos\varphi + p\sin\varphi .$$

Помножимо тепер кватерніон *q* на будь-який векторний кватерніон *v* перпендикулярний до *p*. Одержимо

$$qv = (\cos\varphi + p\sin\varphi)v = v\cos\varphi + pv\sin\varphi .$$

Оскільки *p* і *v* перпендикулярні, добуток *pv* буде мати дійсну частину, рівну нулю; векторна ж частина буде дорівнювати [*p*, *v*], тобто вектору довжиною $|p||v|\cdot\sin\frac{\pi}{2} = |v|$, перпендикулярному *p* і *v* і орієнтованого щодо *p* і *v* таким же чином, як вектор *k* орієнтований щодо *i* та *j*. Позначимо цей вектор через $\tilde{v}$; можна сказати, що $\tilde{v}$ отриманий з *v* поворотом навколо вектора *p* на $\frac{\pi}{2}$. Отже,

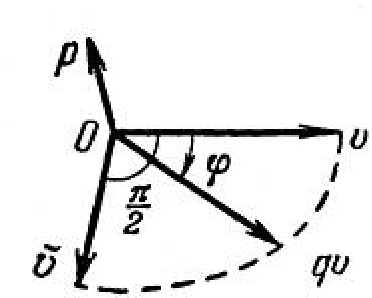


Рис. 8.

$qv = v\cos\varphi + \tilde{v}\sin\varphi$. Вектор *qv* отримується з *v* поворотом навколо осі вектора *q* на кут φ (рис. 6). Отже, якщо *p* – будь-який вектор довжини 1, а *v* – довільний вектор, перпендикулярний *p*, то множення v зліва на кватерніон

$$q = \cos\varphi + p\sin\varphi$$

здійснює поворот вектора *v* навколо осі *p* на кут φ. ▯

До певної міри цей факт можна розглядати як геометричний зміст множення (зліва) на *q*; обмеженням є те, що вектор *v* вибирається не довільно, а тільки перпендикулярно *p*.

2.5. Представлення довільного повороту в просторі за допомогою кватерніонів

Можна, виявляється, записати в кватерніоновій формі і поворот навколо осі *p* будь-якого вектора *v*, але для цього доведеться ускладнити дії над *v*: замість множення на *q* зліва потрібно взяти більш складний вираз

$$qvq^{-1}.$$

Тут q^{-l} позначає кватерніон, обернений до *q*, тобто такий, що $qq^{-1} = 1$. Легко побачити, що

$$q^{-1} = \cos\varphi - p\sin\varphi$$

Теорема 4

При повороті навколо осі p на кут 2φ довільний вектор v переходить в qvq^{-1}*, де*

$$q = \cos\varphi + p\sin\varphi .$$

Приймемо теорему без доведення.

2.6. Завдання про «додавання» поворотів.

Теорема 5

В результаті послідовного виконання двох поворотів, відповідних кватерніонів q_1 *і* q_2*, утворюється третій поворот, відповідний кватерніону* q_2q_1.

□ Нехай виконується поворот на кут $2\varphi_1$ навколо деякої осі, яка характеризується одиничним вектором p_1, слідом за ним нехай виконується інший поворот - на кут $2\varphi_2$ навколо осі, яка характеризується одиничним вектором p_2. В результаті отримаємо деякий новий поворот (результат послідовного виконання двох даних). Знайдемо вісь і кут результуючого повороту.

При першому повороті довільний вектор v перейде в $v_1 = q_1 v q_1^{-1}$ де $q_1 = \cos\varphi_1 + p_1 \sin\varphi_1$. При другому повороті v_1 перейде в

$$v_2 = q_2 v_1 q_2^{-1} = q_2 (q_1 v q_1^{-1}) q_2^{-1} = (q_2 q_1) v (q_1 q_2)^{-1}$$

У результаті послідовного виконання двох поворотів вектор v перейде в

$$v_2 = (q_2 q_1) v (q_1 q_2)^{-1}.$$

Таким чином, в результаті послідовного виконання двох поворотів, відповідних кватерніонів q_1 і q_2, утворюється третій поворот, відповідний кватерніону $q_2 q_1$. ▯

Знайдемо представлення кватерніону $q_2 q_1$:

$$q_2 q_1 = \cos\psi + p\sin\psi\,, \qquad (5)$$

де p – вектор довжини 1. Тоді результуючим поворотом є поворот навколо осі p на кут 2φ.

Приклад

Нехай перший поворот здійснюється навколо осі x на кут $\frac{\pi}{2}$, а другий – навколо осі y на той самий кут. Першому повороту відповідає кватерніон $q_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, а другому – кватерніон $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$. В даному випадку

$$q_2 q_1 = \frac{1}{2}(1+j)(1+i) = \frac{1}{2}(1+i+j-k).$$

Щоб уявити цей кватерніон у вигляді (5), зауважимо, що його дійсна частина дорівнює $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Виходячи з цього, запишемо

$$q_2 q_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(1+i+j-k)\right]\sin\frac{\pi}{3};$$

таким чином, результуюче обертання відбувається навколо вектора $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+i+j-k)$ на кут $\frac{2\pi}{3}$.

Розділ III. Розв'язування задач

№1. Задача: Знайти вісь кватерніона $q = 1+i+j+k$ і його аргумент. Записати цей кватерніон в тригонометричній формі.

Розв'язання.

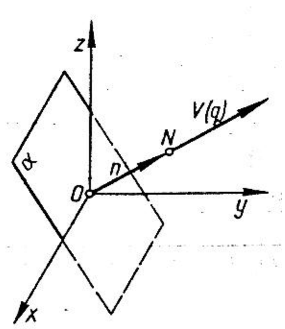


Рис. 9.

Зрозуміло,що

$|q| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2,\ S(q) = 1,\ V(q) = i + j + k,\ |V(q)| = \sqrt{3}$. Орт n вектора $V(q)$ визначаємо так: $V(q) = \sqrt{3} \cdot n,\ n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (i + j + k)$.

Згідно з формулам

$$(\cos\varphi = \frac{S(q)}{\sqrt{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2}} = \frac{q_0}{(q)},) – (\sin\varphi = \frac{|V(q)|}{(S(q))^2 + (|V(q)|)^2} = \frac{|V(q)|}{(q)}.)$$

маємо: $\cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. В межах від 0° до 360° цю умову задовольняє кут $\varphi = 60^\circ$. Таким чином, вісь кватерніона q зображується у вигляді прямої *OP*. Орт цієї осі – вектор $\overrightarrow{ON}$, довжина якого дорівнює одиниці (мал. 1). Аргумент кватерніона q дорівнює 60°. Тригонометрична форма даного кватерніона така:

$$1 + i + j + k = 2\left(\cos 60^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k) \cdot \sin 60^\circ\right).$$

№2. Задача: Нехай вектор $\overrightarrow{OA}$ (мал. 2) повертається навколо осі $\overrightarrow{OP}$ (діагональ куба) на кут $\varphi = 60^\circ$. Який вектор отримаємо в результаті такого повороту? Розв’язання.

Скористаємось рівністю ($b = \tau^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \tau^{-\frac{1}{2}}$,де

$\tau^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} + n \cdot \sin\frac{\varphi}{2},\ \tau^{-\frac{1}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2} - n \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$.), поклавши

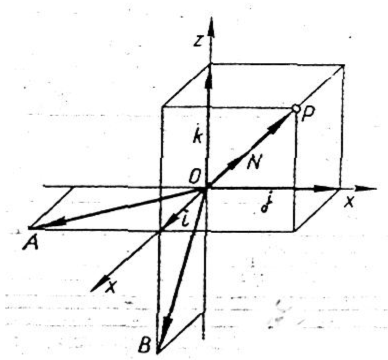


Рис. *10*

$$a = i,\ n = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k),\ \cos\frac{\varphi}{2} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Отримаємо: $b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}(2i + 2j + -k).$

№3. Обчислити площу паралелограма ABCD, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{m} + 5\vec{n}$, $|\ \vec{m}\ | = 3$, $|\ \vec{n}\ | = 2$, $\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right) = \frac{\Pi}{6}$

Розв'язання:

$S_{ABCD}= |(\overline{AB} * \overline{AC})| = \left|\left(\overline{m}-2\overline{n}\right)*\left(3\overline{m}-5\overline{n}\right)\right| = \left|3(\overline{m}*\overline{m})+5(\overline{m}*\overline{n})-6(\overline{n}*\overline{m})-10(\overline{n}*\overline{n})\right| =$

$$|5(\overline{m}*\overline{n})+6(\overline{m}*\overline{n})|=11|\overline{m}*\overline{n}|=11|\overline{m}||\overline{n}|\sin\left(\overline{m} \,\widehat{\ }\, \overline{n}\right)=11*3*2*\frac{1}{2}=33(\text{кв.од.})$$

1.2 Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|\overline{AO} * \overline{OB}|.$$

№ 4 Задача: Використовуючи скалярний добуток векторів, довести теорему косинусів: для довільного трикутника ABC, AB=c, BC=a, AC=b, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

Для будь-яких точок A, B, C має місце рівністьтрикутника

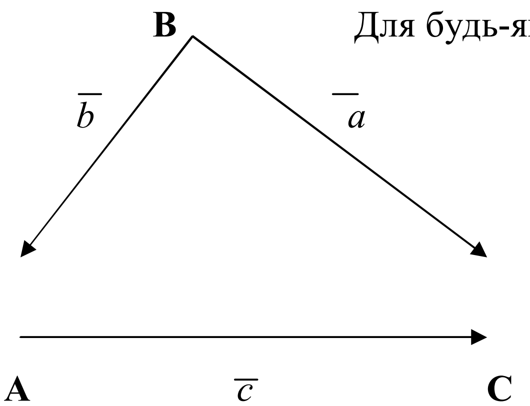


Рис. 11.

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}.$$

Тому, використовуючи означення та властивості скалярного добутку,

$$c^2 = |\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2 = (\overline{AC} + \overline{CB} \quad)^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{AC} * \overline{CB} + \overline{CB}^2 =$$

$$\left|\overline{AC\quad}\right|^2 - 2\overline{CA} * \overline{CB} +$$

$$\left|\overline{CB\quad}\right|^2 = \left|\overline{CB\quad}\right|^2 + \left|\overline{AC\quad}\right|^2 - 2|\overline{CA}||\overline{CB}| cos\left(\overline{CA} \widehat{\ } \overline{\text{CB}}\right) = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\hat{\text{C}}.$$

№ 5 Задача: Знайти три сили $\overline{f_{1,}}\, \bar{f_2}, \bar{f_3}$, які прикладені до однієї точки і мають взаємно перпендикулярні напрямки. Визначити абсолютну величину їх рівнодійної $\bar{r}$, якщо $\left|\bar{f_1}\right| = 2H, \left|\bar{f_2}\right| = 2H, \left|\bar{f_3}\right| = 3H$.

Розв'язання: Оскільки $\overline{f_{1,}}\, \bar{f_2}, \bar{f_3}$ взаємно перпендикулярні, то в ортонормованому базисі $< \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 >$, де $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 -$ орти $\overline{f_{1,}}\, \bar{f_2}, \bar{f_3}$,

$\bar{f_1} = (2; 0; 0), \bar{f_2} = (0; 2; 0), \bar{f_3} = (0; 0; 1)$. Тоді $\bar{r} = \bar{f_1} + \bar{f_2} + \bar{f_3} = (2; 2; 1)$.

$$|\bar{r}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3.$$

Відповідь: $|\bar{r}| = 3$Н.

Висновки

У розділі розглянуто процес розширення поняття «число» шляхом введення уявних одиниць та надання цим уявним одиницям певних властивостей. Було доведено, що всі числа виду $a + bi$ можуть належати тільки до системи комплексних, подвійних або дуальних чисел. Виведені системи чисел було досліджено на властивості операцій над числами. Таким чином виявлено, що у системах подвійних та дуальних чисел не виконується ділення. Розглянуто систему кватерніонів з трьома уявними одиницями, виявлено, що у ній не виконується комутативний закон множення. Отже, процес розширення числових систем не є нескінченним, бо збільшуючи кількість уявних одиниць поступово втрачаються основні властивості операцій над числами.

Однак, ці об’єкти теж цікаві з математичної точки зору, оскільки завдяки кватерніонам виникла векторна алгебра, яка має численні додатки як в самій математиці, так і у фізиці і у особливо в квантовій механіці, завдяки цьогоу з'являються застосування у квантових комп’ютерних системах. З’явились поняття скалярного та векторного добутків, стало можливим представлення довільного повороту в тривимірному просторі. Тобто, кватерніони є одним із засобів розв’язання багатьох задач геометрії та механіки.

Розділ 3 Аналітична геометрія

4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

4.1 Прямокутна система координат

Аналітична геометрія – область математики, яка вивчає геометричні образи алгебраїчними методами, проводячи аналітичні викладки та перетворення. Для цього ці геометричні образи розглядаються у деякій системі координат, яка визначає лінійний векторний простір. Означення та властивості векторного простору детально викладено у розділі 4. Відмітимо лише, що одна із найпростіших систем є декартова прямокутна система координат. На площині така система координат задається двома взаємно перпендикулярними осями Ox та Oy (рис. 13).

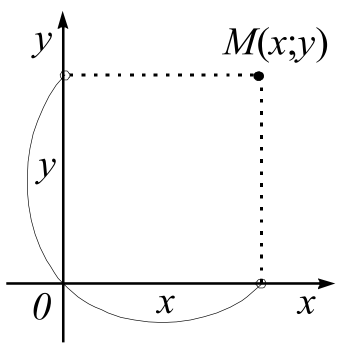


Рис. 11

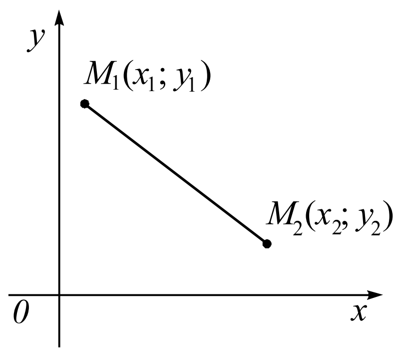


Рис. 12

Вісь Ox називається віссю абсцис, в вісь Oy – віссю ординат. Точка *0* перетину осей називається початком координат. Площина, на якій розміщені осі Ox та Oy. називається координатною площиною й позначається Oxy.

Будь-яка точка на площині характеризується єдиним вектором (x, y). І навпаки будь-яка впорядкована пара чисел (будь-який вектор) визначає на площині єдину точку. Така пара чисел називається координатами точки M. Перше число цієї пари називається абсцисою точки, а друге – ординатою. Той факт, що точка M має координати x та y, позначається так: $M(x; y)$.

Простіші задачі аналітичної геометрії на площині:

Відстань d між точками $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ визначається рівністю

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Площа трикутника, вершинами якого є три точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, визначається формулою:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|.$$

Поділ відрізка у пропорційному відношенні. Нехай координатами кінців відрізка є $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Тоді координати точки $M(x, y)$, для якої справедливе співвідношення $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, визначається рівностями:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{5}$$

Якщо ж точка $M(x, y)$ ділитиме відрізок навпіл, то $\lambda = 1$ і координати точки, що є серединою відрізка матимуть вигляд:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{6}$$

Приклад. Знайти площу трикутника, вершини якого мають такі координати:

$A(2;0)$, $B(6;5)$, $C(4;2)$.

Розв'язання. Згідно формули (4) маємо:

$$S = \frac{1}{2}\left|(6-2)(2-0) - (4-2)(5-0)\right| = \frac{1}{2}\left|8 - 10\right| = 1.$$

Приклад. Знайти точку $M(x,y)$, яка у два рази ближче до точки $M_1(2,2)$, ніж до точки $M_2(8;14)$.

Розв'язання. Точка $M(x,y)$ ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = 0{,}5$. Використовуючи формулу (5) маємо:

$$x = \frac{2 + 0{,}5 \cdot 8}{1{,}5} = 4, \quad y = \frac{2 + 0{,}5 \cdot 14}{1{,}5} = 6 .$$

Якщо обчислити координату x у звичайних дробах то матимемо

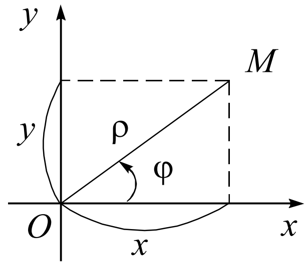
$$x = \frac{2 + \frac{1}{2}8}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2+4}{\frac{3}{2}} = \frac{2(2+4)}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

$$y = \frac{2 + \frac{1}{2}14}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2+7}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \times 9}{3} = 6 .$$

4.2 Полярні координати

У разі прямокутної системи координат існує взаємно однозначна відповідність між парою дійсних чисел та точками на площині. Виявляється, що така взаємно однозначна відповідність має місце і в інших системах. Найбільш важливою після прямокутної є полярна система координат. Вона містить деяку точку O, яка називається

полюсом, та промінь OE, який називається полярною віссю. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання відрізків рис. 15.



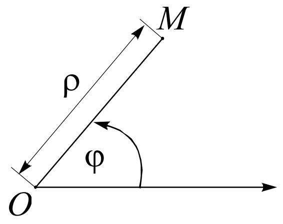


Рис. 14

Рис. 13

Нехай задана полярна система координат і нехай M – довільна точка площини. Нехай ρ – відстань від точки M до полюса O: φ – кут на який необхідно повернути полярну вісь навколо полюса O проти годинникової стрілки до співпадання з променем OM.

Полярними координатами точки M будемо називати пару чисел ρ та φ. При цьому ρ вважається першою координатою і називається полярним радіусом, а φ – другою координатою і називається полярним кутом.

Полярний радіус є невід'ємним числом: $0 \le \rho < \infty$, а полярний кут, як правило, змінюється у таких межах: $0 \le \varphi < 2\pi$. У цьому разі також існує взаємно однозначна відповідність між будь-якою точкою на площині та парою чисел (ρ, φ). Однак поворот осі до точки M може здійснюватись також за годинниковою стрілкою. У цьому випадку полярний кут буде від'ємним. Очевидно, що для довільної точки площини кут визначається з точністю до періоду 2π, тобто, якщо повернути промінь OM навколо полюса O на кут 2π і кратний йому як за годинниковою стрілкою, так і проти неї, то точка M після повороту попаде у початкове положення.

Перехід від полярної системи координат до прямокутної здійснюється за формулами

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \tag{7}$$

а від прямокутної до полярної – за формулами

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}, \tag{8}$$

Відмітимо, що рівність $\mathrm{tg}\varphi = x / y$ визначає два значення полярного кута на проміжку $0 \le \varphi < 2\pi$. Із цих двох значень кута φ необхідно вибрати той, що задовольняв би рівності (7). Знайти φ можна так, нехай $tg\varphi = k$ тоді

$$\varphi = arctg\left(k\right) = arctg\left(tg\left(\varphi\right)\right) = \varphi .$$

Приклад. Знайти полярні координати точок, якщо їхні прямокутні координати визначаються парами чисел $P(1,\ 1)$, $M(-1,\ -1)$.

Розв'язання. Згідно формулам (8) маємо для першої точки такі рівності:

$$\rho = \sqrt{2},\ \mathrm{tg}\varphi = 1 .$$

Рівність $\mathrm{tg}\varphi = 1$ на проміжку $0 \le \varphi < 2\pi$ визначає два значення кута: $\varphi_1 = \pi / 4$ та $\varphi_2 = 5\pi / 4$. Оскільки $\sin(5\pi / 4) = -\sqrt{2} / 2,\ \cos(5\pi / 4) = -\sqrt{2} / 2$, то рівності (7) для точки з координатами $(1,\ 1)$ і цього кута не виконуються а для кута $\frac{\pi}{4}$ маємо $sin\left(\pi / 4\right) = cos\left(\pi / 4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і тому рівності (7) виконуються $x = \rho\cos\varphi_1 = \sqrt{2}\cos\left(\pi / 4\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Тому полярними координатами першої точки є $\left(\sqrt{2},\ \pi / 4\right)$. Для знаходження полярних координат другої точки (-1, -1) одержимо ті ж рівності $\rho = \sqrt{2}$ і $\mathrm{tg}\varphi = 1$. У цьому випадку рівність (7) визначає, що в якості полярного кута необхідно взяти кут $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$. Отже, її полярними координатами є пара чисел $\left(\sqrt{2},\ 5\pi / 4\right)$.

4.3 Рівняння лінії на площині

Розглянемо співвідношення вигляду

$$F(x, y) = 0, \tag{11}$$

що пов'язує змінні x та y у прямокутній системі координат. Рівність (11) будемо називати рівнянням з двома змінними x та y, якщо ця рівність буде виконуватись не для всіх x та y.

Означення. Рівняння (11) називається рівнянням лінії l на площині у заданій прямокутній системі координат, якщо цьому рівнянню задовольняють координати x та y довільної точки, яка лежить на цій лінії l та не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на лінії l.

$$F(x, y) = 0,\ M(x; y) \in l;\ \ F(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \neq 0,\ \widetilde{M}(\widetilde{x}; \widetilde{y}) \notin l. \tag{12}$$

Із означення слідує, що лінія l є сукупністю усіх тих точок на площині, координати яких задовольняють рівнянню (11). У цьому випадку кажуть, що рівняння (11) визначає лінію l.

Лінія l може представлятись рівнянням

$$F(\rho, \varphi) = 0,$$

де $(\rho; \varphi)$ – полярні координати точки.

Задача 4.3.1 Задано точки $M_1(3; -3)$, $M_2(3; 0)$, $M_3(1; -1)$, $M_4(-2; -3)$. Встановити, які із цих точок лежать на лінії, що визначається рівнянням $x + y = 0$, а які не лежать на ній.

Задача 4.3.2. Встановити, які лінії визначаються рівняннями та побудувати їх: 1) $x^2 - y^2 = 0$; 2) $x - y = 0$; 3) $x^2 + y^2 = 0$; 4) а) $\rho - a\cos\varphi = 0$, б) $\rho = a\varphi$, де $a > 0$, змінні ρ, φ – полярні координати.

Задача 4.3.3. Вивести рівняння кола радіуса R з центром в точці (a,b).

6.5. Рівняння прямих на площині

4.4 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \tag{14}$$

де коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі Ox і називається кутовим коефіцієнтом $k = tg(\varphi)$, b –ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_1; y_1)$ із заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{15}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ $(x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{16}$$

Якщо абсциса або ордината цих різних точок співпадає, то рівняння прямої матиме вигляд: $(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$.

Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0, \tag{17}$$

де A, B, C – довільні коефіцієнти (A і B одночасно не дорівнюють нулю). Коефіцієнти A і B є також координатами вектора $\overline{n} = (A, B)$ перпендикулярного до прямої (вектора нормалі прямої).

Рівння виводиться наступним чином

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0,$$
$$Ax+By-Ax_1-By_1=0,$$
$$Ax+By-Ax_1-By_1=0,$$
$$Ax+By+C=0,$$

де $C=-Ax_1-By_1$.

Частинні випадки загального рівняння.

1. При $C=0,\ B\neq 0$. $y=-\dfrac{A}{B}x$, пряма проходить через початок координат.

2. При $B=0,\ A\neq 0$. $x=-\dfrac{C}{A}=a$, пряма паралельна осі Oy.

3. При $A=0,\ B\neq 0$. $By+C=0,\ y=-\dfrac{C}{B},\ y=-\dfrac{C}{B}=b$, пряма паралельна осі Oy.

4. При $B=C=0$. пряма є віссю Oy.

5 При $A=C=0$. $y=0$ пряма є віссю Ox.

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(3;1)$ та $M_2(5;4)$. Рівняння через 2 точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ в нашому випадк має вигляд

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-1}{4-1}$$

Розв'язування. У цьому випадку маємо $x_1=3,\ y_1=1,\ x_2=5,\ y_2=4$. Підставивши їх у рівність (16) отримаємо $\dfrac{x-3}{5-3}=\dfrac{y-1}{4-1}$ або

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3},\ \text{або}\ 3x-2y-7=0.$$

6.5.2. Кут між двома прямими

Якщо відомі кутові коефіцієнти двох прямих k_1 і k_2, то один із кутів α між ними визначається рівністю

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{18}$$

Другий кут між прямими дорівнює $\pi - \alpha$.

Умова паралельності двох прямих: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Якщо дві прямі задаються рівнянням в загальній формі $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то один із кутів між цими прямими визначається котом між двома нормалями до них: $\overline{n}_1 = (A_1,\ B_1)$ та $\overline{n}_2 = (A_2,\ B_2)$, а кут між нормалями визначається за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Умова паралельності двох прямих визначається умовою паралельності їхніх нормалей : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих визначається умовою перпендикулярності їхніх нормалей: $A_1 A_1 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

4.5 Векторні величини

У повсякденній практиці ми маємо справу з величинами двох видів. Одні з цих величин такі, як температура, час, маса, довжина, площа, робота тощо можна визначити одним числовим значенням, інші ж величини, такі, як сила, швидкість, прискорення тощо можна визначити тільки тоді, коли відомо не тільки їх числове значення, а й напрям у просторі. Величини першого виду називають **скалярними величинами** або **скалярами.** Величини другого виду називають **векторними величинами.**

Кожну векторну величину геометрично можна зобразити напрямленим прямолінійним відрізком - **вектором** - довжина якого дорівнює числовому значенню векторної величини {у вибраному масштабі) і напрям співпадає з напрямом цієї величини.

Вектор визначають двома точками: перша - це початок його, друга - кінець; додатний напрям вектора - від початку до кінцевої точки, наприклад, вектор $\overline{AB}$ має початок у точці *A* і кінець у точці *B,* стрілка вказує напрям вектора.

Якщо початок і кінець вектора співпадають, то вектор називають **нульовим** (нуль-вектор).

Два ненульових вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називають **колінеарними,** якщо прямі *AB* і *CD* паралельні або співпадають.

Вектори називають **компланарними,** якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Довжина, або **модуль,** вектора $\overline{AB}$ - це відстань між його початком *A* і кінцем (довжина відрізка *AB).* Для модуля вектора $\overline{AB}$ використовують позначення $\left|\overline{AB}\right|$ або $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{a}\right|$ Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають **одиничний вектор або орт.**

Вектори рівні, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і рівні модулі.

На рис.1, де *ABCD* є паралелограм, зображено рівні вектори $\overline{AD} = \overline{BC}$. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ не рівні. Хоч ці вектори і колінеарні, і мають рівні модулі, але вони протилежно напрямлені. $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{BC} = \overline{a}$

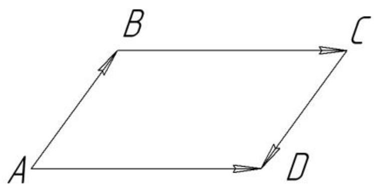


Рис. 15

Вектори можна додавати, віднімати, множити на число.

Додавання двох векторів - це операція побудови за двома векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ третього вектора - вектора суми $\bar{c}$.

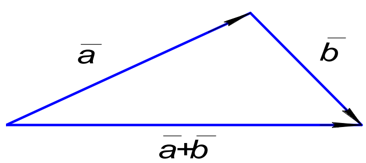


Рис. 16

Цю побудову виконуємо так: 1) з довільної точки *O* відкладаємо вектор $\overline{OA}=\bar{a}$; 2) з його кінця *A* відкладаємо вектор $\overline{AB}=\bar{b}$; *3)* з'єднаємо початок *O* першого вектора з кінцем *B* другого. Знайдений в результаті цієї побудови вектор $\overline{OB}$ = $\bar{c}$ називають вектором-сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Означення. Сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ є $\bar{c}$ вектор *,* що сполучає початок вектора $\bar{a}$ з кінцем вектора $\bar{b}$ за умови, що вектор $\bar{b}$ відкладено від кінця вектора $\bar{a}$.

4.6 Скалярний добуток і його властивості.

Означення 1. ***Скалярним добутком*** двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ позначається символом $(\overline{a},\overline{b})$ або $\overline{a}\cdot\overline{b}$; абсолютна величина позначається $|\overline{a}|$ *та* $|\overline{b}|$ і обчислюється за формулою, якщо

$$\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\quad \overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\},$$

то

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \ і\ |\overline{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}\ .$$

Отже, на основі означення отримаємо формулу:

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (4.5.1)$$

де φ - кут між векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Оскільки $Пр_{\overline{b}}\overline{a}=|\overline{a}|\cdot\cos\varphi,\quad Пр_{\overline{b}}\overline{b}=|\overline{b}|\cos\varphi$,

то

$$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot Пр_{\overline{a}}\overline{b}=|\overline{b}|\cdot Пр_{\overline{b}}\overline{a}$$

$$Пр_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|} \qquad (4.5.2)$$

Основні властивості скалярного добутку

1. $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$.
2. $(\lambda\overline{a},\overline{b})=\lambda(\overline{b},\overline{a})$.
3. $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c})$.
4. $(\overline{a},\overline{a})=|\overline{a}|^2$, *звідки* $|\overline{a}|=\sqrt{(\overline{a},\underline{a})}$.

5. $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, якщо $\overline{a} \perp \overline{b}$ або один з них, або обидва є нульовим вектором.

4.7 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ.

4.7.1 Векторний добуток векторів і його властивості.

Означення. Три вектори називаються ***впорядкованою трійкою*** (або просто трійкою), якщо вказано, який з цих векторів являється першим, який – другим, і який – третій.

Означення. Трійка некомпланарних векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називається ***правою*** (***лівою***), якщо виконується одна із наступних трьох умов:

1. якщо, вектори зведені до спільного початку, і вони розміщені так, що можуть бути розташовані відповідно великий, не зігнутий вказівний і середній пальці правої (лівої) руки;
2. якщо після зведення до спільного початку вектор $\overline{c}$ розташований по ту сторону від площини, яка визначається векторами $\overline{a}\, i\, \overline{b}$, звідки найкоротший поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ здійснюється проти часової стрілки (за часовою стрілкою);
3. якщо знаходячись всередині внутрішнього кута, утвореного приведеним до спільного початку векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, ми бачимо поворот від $\overline{a}$ до $\overline{b}$ і від нього до $\overline{c}$ здійснюється проти часової стрілки (за часовою стрілкою)

Означення. ***Афінна*** або ***Декартові система координат*** називається ***правою*** (***лівою***), якщо три базисних вектора утворюють праву(ліву) трійку

Означення. ***Векторним добутком*** векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається $\overline{a} \times \overline{b}$, який задовольняє умовам:

1) вектор $\overline{a} \times \overline{b}$ перпендикулярний до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$;
2) довжина $|\overline{a} \times \overline{b}|$ вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi \quad де \quad \varphi = \left(\overline{a}, \overline{b}\right)$ (23)

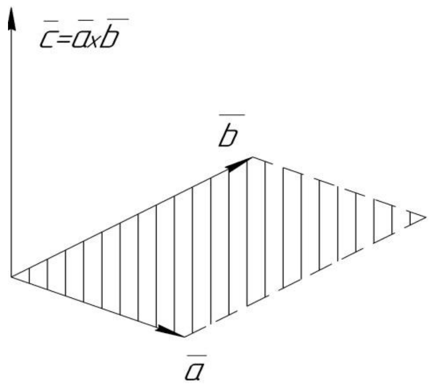


Рис.17

Основні властивості векторного добутку

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}$. (векторний добуток залежить від послідовності співмножників)
2. $\lambda(\overline{a}\times\overline{b})=(\lambda\overline{a})\times(\lambda\overline{b})$.
3. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.
4. векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли вектори колінеарні (паралельні) або хоча б один з них нульовий тобто $\overline{a}\times\overline{b}=0$.

Формула вираження векторного добутку через координати співмножників має вигляд:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (24)$$

Приклад. Дано точки A(2; -1; 2) , B(1; 2; -1), C(3; 2; 1). Знайти векторний добуток векторів $\overline{AB}\times\overline{BC}$.

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$ *та* $\overline{BC}$ $\overline{AB}=\{-1;3;-4\},\overline{BC}=\{2;0;2\}$.

$$\overline{AB}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\overline{i}-4\overline{j}-6\overline{k}.$$

Отже, $\overline{AB} \times \overline{BC} = \{6; -4; -6\}$.

Відповідь: Векторний добуток векторів $\overline{AB}$ *та* $\overline{BC}$ дорівнює $\{6; -4; -6\}$.

4.7.2 Застосування векторного добутку векторів.

Розглянемо задачі в яких при їх розв’язанні застосовується векторний добуток векторів.

Задача 1. Обчислення площі паралелограма: згідно з властивостей площа паралелограма дорівнює добуткові його суміжних сторін на синус кута між ними, тобто $S = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin\varphi = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$ тому можна вивести формулу для обчислення площі паралелограма:

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \qquad (25)$$

Формула (25) є формулою для ***обчислення площі паралелограма***.

З обчислення площі паралелограма знаходимо формулу обчислення площі трикутника вона буде дорівнювати половині площі паралелограма, тобто

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| \qquad (26)$$

Формула (26) є формулою для ***обчислення площі трикутника.***

Приклад 15. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = \left\{1; 0; -\frac{1}{4}\right\}, \quad \overline{b} = \{4; -12; -5\}$.

Розв’язання:

Застосовуючи формулу (25) отримаємо

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = -3\overline{i} + 4\overline{j} - 12\overline{k}.$$

$\overline{a} \times \overline{b} = \{-3; 4; -12\}$. Тому площа дорівнює:

$$S = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13\ (\textit{кв.од.})$$

Відповідь: Площа паралелограма дорівнює 13 (*кв.од.*)

Приклад 16. Знайти площу трикутника з вершинами у точках A(1; 2; 1), B(4; 3; 2), C(2; 4; 4).

Розв’язання:

Нехай $\overline{a} = \overline{AB} = \{3; 1; 1\}$, $\overline{b} = \overline{AC} = \{1; 2; 3\}$. Знаходимо $\overline{a} \times \overline{b}$:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \overline{i} - 8\overline{j} + 5\overline{k}$$

$$\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 64 + 25} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Площа трикутника ΔABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ та $\overline{b}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10}\ (\textit{кв.од.})$$

Відповідь: Площа ΔABC дорівнює $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ (*кв.од.*)

<u>**Задача 2.**</u> **Обчислення моменту сили.** Якщо вектор $\overline{F}$ зображує силу, прикладену до точки M, а вектор $\overline{a} = \overline{OM}$, то вектор $\overline{a} \times \overline{F}$ є моментом сили $\overline{F}$ відносно точки O, тобто

$$mom_o \overline{F} = \overline{a} \times \overline{F} \qquad (27)$$

Формула (27) є формулою для ***обчислення моменту сил.***

Приклад 17. Сила $\overline{F} = \{1; -2; 4\}$ прикладена до точки М(1; 2; 3). Знайти момент цієї сили відносно точки А(3; 2; -1).

<u>Розв’язання:</u>

Знаходимо координати вектора $\overline{AM} = \{-2; 0; 4\}$ і застосовуючи формулу (26) отримаємо

$$mom_A \overline{F} = \overline{AM} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8\overline{i} + 12\overline{j} + 4\overline{k}.$$

$mom_A \overline{F} = (8; 12; 4).$

Відповідь: Момент сили дорівнює $mom_A \overline{F} = (8; 12; 4).$

4.8 МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ.

4.8.1 Визначення мішаного добутку трьох векторів і його властивості.

Нехай дані три довільні вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Якщо вектор $\overline{a}$ векторно помножити на вектор $\overline{b}$, а потім вектор, який отримаємо при цьому $\overline{a} \times \overline{b}$ скалярно помножити на вектор $\overline{c}$, то в результаті отримаємо число $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$, яке називається ***мішаним добутком векторів*** $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Геометричне тлумачення мішаного добутку векторів вказує наступна теорема.

Теорема 6. Мішаний добуток $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного початку векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, взятих зі знаком „+", якщо трійка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права і зі знаком „–", якщо трійка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ ліва. Якщо ж вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні то $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$ дорівнює нулеві**.**

Доведення.

Припустимо, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні. Тоді $Пр_{\overline{a}} \overline{c} = h$ з точністю до знака, дорівнює висоті h паралелепіпеда побудованого на зведених до спільного початку векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ при умові, що основою служить паралелограм, побудований на векторах $\overline{a}, \overline{b}$.

Отже, його **об'єм паралелепіпеда** обчислюється за формулою

$$V = S \cdot h = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} \qquad (28)$$

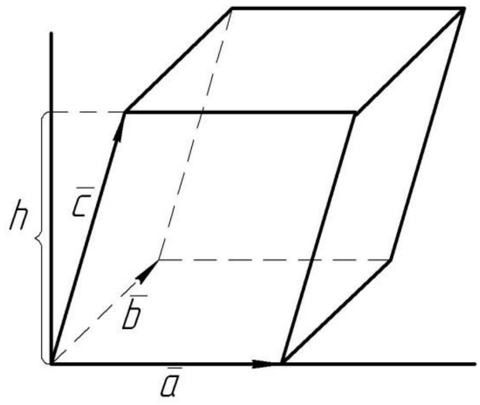


Рис.18

Основні властивості мішаного добутку

1. $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=(\overline{b},\overline{c},\overline{a})=(\overline{c},\overline{a},\overline{b})=-(\overline{b},\overline{a},\overline{c})=-(\overline{c},\overline{b},\overline{a})=-(\overline{a},\overline{c},\overline{b})$
2. якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вектори компланарні.
3. мішаний добуток трьох векторів, два з яких співпадають, дорівнює нулеві.

4.8.2 Обчислення мішаного добутку через координати векторів.

Нехай дані координати векторів

$$\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\},\quad \overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\},\quad \overline{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$$

то мішаний добуток обчислюється за формулою:

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (29)$$

формула (29) – **формула мішаного добутку, який заданий своїми координатами.**

4.8.3 Умова компланарності трьох векторів.

Якщо вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$, тобто

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (30)$$

Приклад 18. Знайти мішаний добуток векторів $\overline{a} = \{3;\ 2;\ 1\}, \overline{b} = \{1;\ 4;\ 1\}, \overline{c} = \{1;\ 1;\ 3\}$.

<u>Розв’язання:</u>

Застосовуючи формулу (28) отримаємо

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 1 - 4 - 6 - 3 = 26$$

Відповідь: Мішаний добуток векторів $\overline{a},\ \ \overline{b},\ \ \overline{c}$ дорівнює 26.

Приклад 19. Перевірити, чи точки A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3) лежать в одній площині.

<u>Розв’язання:</u>

Умова, чи знаходяться точки в одній площині – це є умова компланарності векторів.

Знайдемо координати векторів $\overline{AB} = \{-1; -1; 6\}, \overline{AC} = \{-2; 0; 2\}, \overline{AD} = \{1; -1; 4\}$ і обчислимо їх мішаний добуток. Отримаємо:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 12 - 0 - 8 - 2 = 0$$

Отже, дані вектори компланарні, тобто лежать в одній площині.

Відповідь: Точки A, B, C, D лежать в одній площині.

4.8.4 Застосування мішаного добутку векторів.

Розглянемо задачі які при їх розв'язанні застосовується мішаного добутку векторів.

<u>**Задача 1.**</u> **Обчислення об'єму тетраедра (трикутної піраміди)** Об'єм трикутної піраміди ABCD становить одну шосту об'єму паралелепіпеда, побудованого на даних векторах $\overline{AB},\ \overline{AC}\ i\ \overline{AD}$, тобто

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD})\right| \qquad (31)$$

Приклад 20. Знайти об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3).

<u>Розв'язання:</u>

Знаходимо координати векторів $\overline{AB},\ \overline{AC}\ i\ \overline{AD}$:

$\overline{AB} = \{3;6;3\},\ \overline{AC} = \{1;3;-2\},\ \overline{AD} = \{2;2;2\}$ далі обчислюємо їх мішаний добуток

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + (-24) + 6 - 18 - 12 - (-12) = -18$$

Використовуючи формулу (30) отримаємо $V_{nip} = \frac{1}{6}\left|-18\right| = 3\ (\text{куб.од.})$

Відповідь: Об'єм піраміди дорівнює $3\ (\text{куб.од.})$

Приклад 21. Дано вершини тетраедра: A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(9; -4; 8). Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини D на площину ABC.

<u>Розв'язання:</u>

Знаходимо координати векторів $\overline{AB},\ \overline{AC}\ i\ \overline{AD}$, які збігаються з ребрами тетраедра

$\overline{AB} = \{2;-2;-3\},\ \overline{AC} = \{4;0;6\},\ \overline{AD} = \{7;-7;7\}$ далі обчислюємо їх мішаний добуток

$$(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ 7 & -7 & 7\end{vmatrix}=0+(-84)+84-0-(-56)-(-84)=140$$

Використовуючи формулу (30) отримаємо $V_{nip}=\frac{1}{6}|140|=\frac{70}{3}$ $(куб.од.)$

З іншого боку

$$V_{nip}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot h. \qquad (32)$$

де h – висота піраміди.

Використовуючи формулу (25) то площа ΔАВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}\ i\ \overline{AC}$, тобто

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\overline{i}-24\overline{j}+8\overline{k}$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28$$

Площа трикутника ΔАВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}\ i\ \overline{AC}$:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot 28=14\ (кв.од.)$$

$$\frac{70}{3}=\frac{1}{3}\cdot 14\cdot h,\quad 14h=70,\quad h=5.$$

Відповідь: Довжина висоти, опущеної з вершини D дорівнює 5 *од*.

4.8.5 Приклади і методи розвя’зання задач з аналітичної геометрії

Задача №1

Дані дві точки $A(3,8), B(-5,4)$

1. Розрахувати відстань між точками *A* і *B*

Розв’язок

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$$

2. Розрахувати спрямовуючий кут вектора $\overline{A}\overline{B}$

Розв’язок

$$\cos\angle(\overline{AB}, Ox) = \frac{x_B - x_A}{|AB|} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\angle(\overline{AB}, Ox) = \pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

3. Розрахувати координати точки $C(x_C; y_C)$, середньої на відрізку *AB*

Розв’язок

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = -1, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 6$$

C(-1,6)

4. Скласти рівняння прямої $П_1$, яка проходить через точки *A* і *B*.

Розв’язок

$\Pi_1 : \dfrac{x - x_B}{x_A - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_A - y_B}$. Підставивши значення

$\frac{x+5}{8}=\frac{y-4}{-4}$. Або $y=\frac{-x+3}{2}$.

5. Скласти рівняння прямої *П₂*, яка лежить у площині *Oxy* і проходить через точку *A*, перпендикулярну до вектора $\overline{A}\overline{B}$.

Розв’язок

$\overline{AB}=(-8,-4)$. Тоді шукана пряма запишеться у вигляді

$\Pi_2:-8(x-x_A)-4(y-y_A)=0$, або

$8x+4y-56=0$

6. Перевірити, чи проходить пряма *$П_2$* через точку *D(3,-2)*.

Розв’язок

Підставимо координати точки *D* в рівняння *$П_2$*:

$8\cdot 3-4\cdot 2-56=-40\neq 0$, відповідно точка D не лежить на Π_2

7. Обчислити кут між вектором $\overline{A}\overline{B}$ і радіусом-вектором $\overline{O}\overline{D}$

Розв’язок

$$\cos\angle(\overline{AB},\overline{OD})=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OD}}{|AB||OD|}=\frac{-8\cdot 3+(-4)\cdot(-2)}{4\sqrt{5}\sqrt{3^2+2^2}}=-\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\angle(\overline{AB},\overline{OD})=\pi-\arccos\frac{4}{\sqrt{65}}$$

8. Знайти векторний добуток ($\overline{A}\overline{B}\times\overline{O}\overline{D}$)

Розв’язок

Обидва вектори лежать у площині *Oxy,* тому їхній векторний добуток перпендикулярний до цієї площини. Тобто перші дві координати рівні 0. Третя є значенням визначника з координат векторів.

$$(\overline{AB}\times\overline{OD})=\left(0,0,\begin{vmatrix}-8 & -4\\ 3 & -2\end{vmatrix}\right)=(0,0,28)$$

9. Зробити малюнок, який ілюструє і пояснює розв’язок задачі

Розв’язок

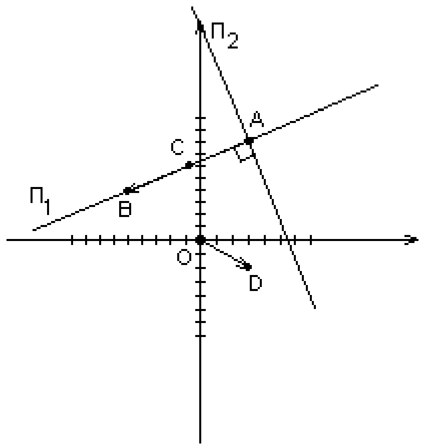


Рис. 19.

Задача №2

Дані чотири точки, які утворюють чотирикутну піраміду

A(2,2,2), *B*(-4,3,3), *C*(4,0,4), D(5,5,1);

1. Розрахувати відстань між точками *A* і *B*.

Розв’язок

$$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}=\sqrt{36+1+1}=\sqrt{38}$$

2. Розрахувати кут між ребром *AB* та ребром *BC*.

Розв'язок

$\overline{BA} = (6,-1,-1)$; $\overline{BC} = (8,-3,1)$

$$\cos\angle(\overline{BA},\overline{BC}) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|BA||BC|} = \frac{6\cdot 8 + 1\cdot 3 - 1\cdot 1}{\sqrt{38}\sqrt{64+9+1}} = \frac{25}{\sqrt{703}}$$

Звідки $\angle(\overline{BA},\overline{BC}) = \arccos\frac{25}{\sqrt{703}}$

3. Розрахувати відстань від точки *A* до відрізку *BC*;

Розв'язок

Відстань можна розрахувати як висоту трикутника

$$d(A,BC) = |AB|\, sin\angle(\overline{BA},\overline{BC}) = \sqrt{74}\sqrt{1-\frac{625}{703}} = 2\sqrt{\frac{39}{19}}$$

4. Написати рівняння площини, яка проходить через три точки *O*, *A, B*.

Розв'язок

Площину, яка проходить через точки *O*, *A, B* можна знайти за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_O & y-y_O & z-z_O \\ x_A-x_O & y_A-y_O & z_A-z_O \\ x_B-x_O & y_B-y_O & z_B-z_O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -14y + 14z = 0$$

Спростивши, отримаємо $(OAB): y - z = 0$

5. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки *O*, *A*.

Розв'язок

Пряма знаходиться за формулою

$$\frac{x-x_O}{x_A-x_O}=\frac{y-y_O}{y_A-y_O}=\frac{z-z_O}{z_A-z_O}$$

$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$. Спростивши, отримаємо

$OA\colon x=y=z$

6. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки *A, B*.

Розв’язок

Пряма знаходиться за формулою

$\frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{z-z_B}{z_A-z_B}$. Отримаємо

$AB\colon \frac{x+4}{6}=-y+3=-z+3$

7. Розрахувати об’єм піраміди *ABCD*.

Розв’язок

Об’єм піраміди можна обчислити як одну шосту від змішаного добутку векторів, на яких вона побудована.

$\overline{AB}=(-6,1,1)$, $\overline{AC}=(2,-2,2)$, $\overline{AD}=(3,3,-1)$

$$V_{ABCD}=(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})/6=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-6 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -1\end{vmatrix}=\frac{-12+6+6+6+36+2}{6}=\frac{22}{3}$$

8. Написати рівняння площини, яка проходить через точку A і яка відтинає рівні відрізки на осях координат.

Розв’язок

Така площина має вектор нормалі (1,1,1). Звідси

$1\cdot(x-2)+1\cdot(y-2)+1\cdot(z-2)=0$, або, спростивши, $x+y+z-6=0$

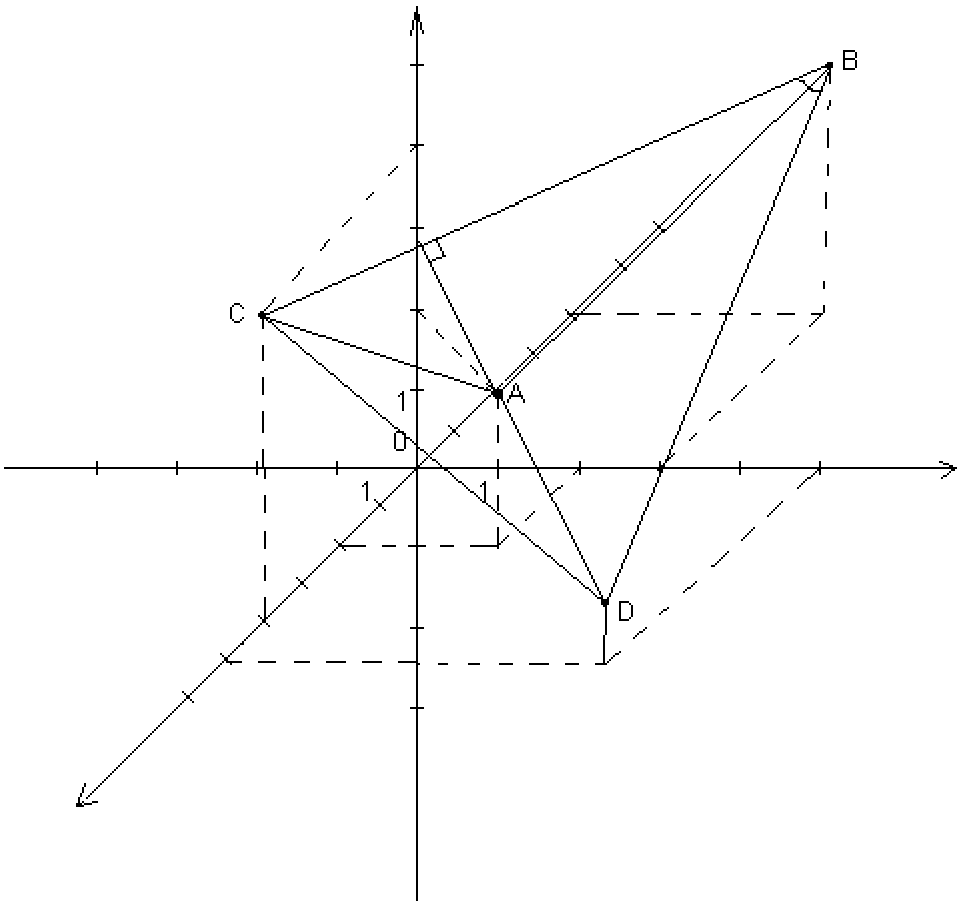


Рис. 20.

Задача №3

$П_1$: $x^2+4y^2=4$

$A(1,-2,5)$

Скласти канонічне рівняння кривой лінії, яка є лінією перетину циліндричної поверхні Π_1 та нахиленої площини Π_2, яка проходить через ось Ox і точку A.

Розв’язок

Перетином площини та еліптичного циліндра є еліпс.

Зауважимо, що одна з осей цього еліпса співпадає з тією віссю основного еліпса циліндра, яка лежить на осі Ox.

Для знаходження другої осі еліпса спроектуємо все на площину Oyz.

Друга вісь буде лежати на прямої, яка проходить через початок координат і проекцію точки A, тобто на прямої $5y+2z=0$. При цьому цією віссю є відрізок, рознашований посередині проекції циліндра, тобто між -1 і 1 за віссю Oy. Отже маємо, що друга вісь рівна $2\sqrt{1+(5/2)^2}=\sqrt{29}$

Відповідь: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{29}=1$

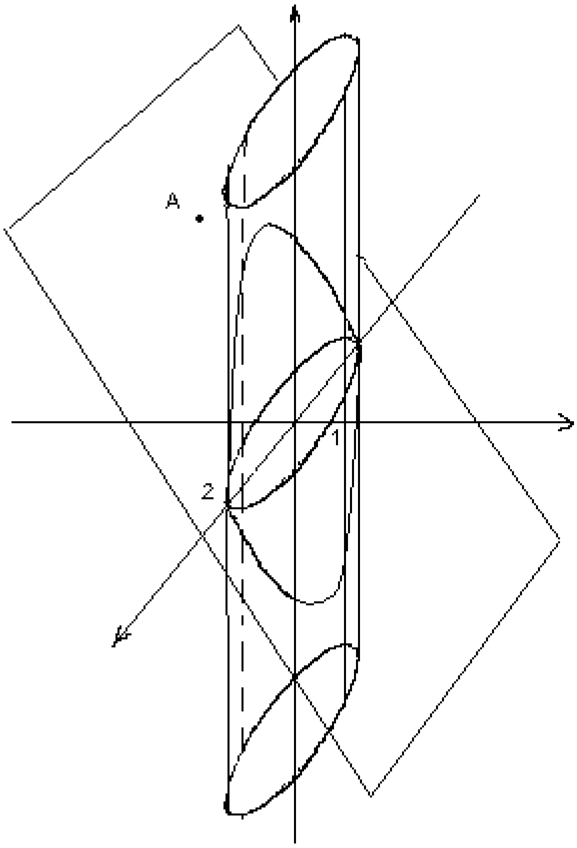


Рис. 21.

Задача 2.3

Крива другого порядку задана рівнянням:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Визначити тип цієї кривої, записати її канонічне рівняння і побудувати в старій системі координат

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{22}	a_{13}	a_{23}	a_{33}
1	1	-2	3	-1	0	1
2	3	-1	3	2	2	-4
3	5	12	-1	2	-2	-1
4	0	-3	0	0	1	3

5	-5	-2	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
6	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-2
7	1	-1	1	-2	-3	3
8	3	1	3	3	-1	-5
9	4	-2	1	6	-3	9
10	1	0	0	3	-4	1
11	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
12	7	2	2	-20	-16	5
13	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	-1	3
14	1	-1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
15	2	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	1	0
16	1	4	4	-3	-1	1
17	1	1	1	1	1	-4
18	8	0	-3	1	$-\frac{5}{2}$	1
19	1	-1	2	-2	-3	29
20	9	-3	1	1	0	-7
21	1	-1	0	1	1	1
22	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-12
23	9	-6	4	-8	1	0
24	1	-1	1	-2	-3	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6
26	1	-1	-2	-2	-3	3
27	1	-1	1	1	-3	0

28	1	1	1	1	1	-4
29	9	-3	1	-3	1	0
30	1	0	1	-2	-3	0
31	0	0	2	4	6	-3
32	1	-2	4	1	-1	-1
33	5	6	0	-11	-6	-19
34	3	5	7	2	1	1
35	1	-1	2	-2	-3	3
36	3	-3	5	-2	-3	10
37	9	12	16	20	15	0
38	1	-1	-2	-2	-3	$-\frac{13}{3}$
39	3	1	-1	4	5	14
40	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
41	3	-2	4	-1	-2	2
42	1	3	9	2	6	-5
43	3	-1	3	2	2	-4
44	5	2	8	-16	-28	80
45	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
46	9	-2	6	3	-4	2
47	1	3	1	3	1	-1
48	5	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	1	-5
49	2	-2	5	-8	0	3
50	1	-1	2	-2	-3	3
1	1	-2	3	-1	0	1
2	3	-1	3	2	2	-4

3	5	12	-1	2	-2	-1
4	0	-3	0	0	1	3
5	-5	-2	1	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
6	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	-2
7	1	-1	1	-2	-3	3
8	3	1	3	3	-1	-5
9	4	-2	1	6	-3	9
10	1	0	0	3	-4	1
11	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
12	7	2	2	-20	-16	5
13	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	-1	3
14	1	-1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
15	2	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	1	0
16	1	4	4	-3	-1	1
17	1	1	1	1	1	-4
18	8	0	-3	1	$-\frac{5}{2}$	1
19	1	-1	2	-2	-3	29
20	9	-3	1	1	0	-7
21	1	-1	0	1	1	1
22	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	2	-12
23	9	-6	4	-8	1	0
24	1	-1	1	-2	-3	3
25	6	-2	9	-2	-16	-6

26	1	-1	-2	-2	-3	3
27	1	-1	1	1	-3	0
28	1	1	1	1	1	-4
29	9	-3	1	-3	1	0
30	1	0	1	-2	-3	0
31	0	0	2	4	6	-3
32	1	-2	4	1	-1	-1
33	5	6	0	-11	-6	-19
34	3	5	7	2	1	1
35	1	-1	2	-2	-3	3
36	3	-3	5	-2	-3	10
37	9	12	16	20	15	0
38	1	-1	-2	-2	-3	$-\frac{13}{3}$
39	3	1	-1	4	5	14
40	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
41	3	-2	4	-1	-2	2
42	1	3	9	2	6	-5
43	3	-1	3	2	2	-4
44	5	2	8	-16	-28	80
45	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
46	9	-2	6	3	-4	2
47	1	3	1	3	1	-1
48	5	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	1	-5
49	2	-2	5	-8	0	3
50	1	-1	2	-2	-3	3

51	0	1	3	1	-3	5
52	21	$\frac{1}{2}$	-10	0	0	0
53	1	-2	4	5	-10	25
54	1	2	4	-3	-3	0
55	4	-2	1	2	-1	1
56	1	1	1	-4	0	4
57	1	-1	-3	-2	-3	3
58	32	30	7	-8	-1	1
59	2	-3	5	-1	1	-10
60	0	5	-2	3	2	21
61	1	$\frac{5}{2}$	-14	0	0	0
62	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	-2	-12
63	1	-2	3	1	-1	0
64	2	-2	1	-1	3	-3
65	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10
66	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
67	1	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	1
68	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
69	9	-6	2	-4	0	0
70	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
71	5	12	-1	2	0	1
72	2	2	-3	-1	1	-2
73	3	1	3	3	-1	-5

74	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
75	3	-1	3	2	2	-4
76	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
77	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
78	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{4}$	-2
79	1	-1	-3	-2	-3	3
80	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
81	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	0
82	1	3	9	0	9	0
83	2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{2}$	18
84	1	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
85	0	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{3}{2}$	-1
86	3	$-\frac{7}{2}$	2	-2	3	-5
87	1	2	-	-2	$-\frac{1}{2}$	4
88	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	-5
89	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
90	6	$-\frac{1}{2}$	0	-1	2	0
91	2	-2	5	-4	0	6
92	1	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
93	2	2	5	-4	0	6

94	1	-1	2	-2	-3	3
95	6	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
96	2	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
97	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
98	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
99	1	-1	1	-2	-3	3
100	3	$-\frac{7}{2}$	2	3	-2	-5
51	0	1	3	1	-3	5
52	21	$\frac{1}{2}$	-10	0	0	0
53	1	-2	4	5	-10	25
54	1	2	4	-3	-3	0
55	4	-2	1	2	-1	1
56	1	1	1	-4	0	4
57	1	-1	-3	-2	-3	3
58	32	30	7	-8	-1	1
59	2	-3	5	-1	1	-10
60	0	5	-2	3	2	21
61	1	$\frac{5}{2}$	-14	0	0	0
62	1	$\frac{1}{2}$	1	-1	-2	-12
63	1	-2	3	1	-1	0
64	2	-2	1	-1	3	-3
65	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	10

66	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
67	1	$-\frac{3}{2}$	1	0	1	1
68	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
69	9	-6	2	-4	0	0
70	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
71	5	12	-1	2	0	1
72	2	2	-3	-1	1	-2
73	3	1	3	3	-1	-5
74	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
75	3	-1	3	2	2	-4
76	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
77	3	$\frac{7}{2}$	5	2	$\frac{5}{2}$	1
78	2	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{25}{4}$	-2
79	1	-1	-3	-2	-3	3
80	1	1	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
81	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	0
82	1	3	9	0	9	0
83	2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{2}$	18
84	1	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
85	0	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{3}{2}$	-1

86	3	$-\frac{7}{2}$	2	-2	3	-5
87	1	2	-	-2	$-\frac{1}{2}$	4
88	2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	8	-5
89	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
90	6	$-\frac{1}{2}$	0	-1	2	0
91	2	-2	5	-4	0	6
92	1	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	6
93	2	2	5	-4	0	6
94	1	-1	2	-2	-3	3
95	6	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
96	2	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
97	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	-3
98	3	1	2	$\frac{3}{2}$	-2	0
99	1	-1	1	-2	-3	3
100	3	$-\frac{7}{2}$	2	3	-2	-5

5 Векторний аналіз

***Означення* 1.** Вектором називається напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$. Буква A зазначає початок вектора, а буква B – його кінець.

Вектор також може позначатись однією маленькою буквою стрілкою або рискою вгорі $\vec{a}$, $\overline{b}$.

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, називається *нуль-вектором* і позначають $\vec{0}$: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, або просто 0.

Два вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

Довжиною (модулем) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор і позначають $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, або просто *AB*. Аналогічно довжину вектора $\overline{a}$ позначають $|\overline{a}|$, або *a*. Якщо $|\overline{a}| = 1$, то вектор називають одиничним.

Означення 2. Два вектора називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і їхні довжини рівні.

Додавання векторів.

Означення 3. (Правило трикутника) Якщо два вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розташовані так, що початок другого вектора співпадає з кінцем першого то сумою цих векторів називається вектор $\overline{c}$, початок якого збігається з початком вектора $\overline{a}$, а кінець вектора – з кінцем вектора $\overline{b}$.

(Правило паралелограма) Якщо два вектора $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розташовані так, що початки збігаються, то сумою цих двох векторів називається вектор $\overline{c}$, який зображують у вигляді діагоналі паралелограма, побудованого на заданих векторах, причому, початок вектора $\overline{c}$ збігається з початком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Множення вектора на число.

Означення 4. Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називається вектор $\overline{b}$, колінеарний вектору $\overline{a}$, при $\lambda \geq 0$ однаково напрямлений з вектором $\overline{a}$, при $\lambda < 0$ протилежно напрямлений з вектором $\overline{a}$ та $\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$.

Віднімання векторів

Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який дорівнює сумі векторів $\overline{a}$ і $-\overline{b}$: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$.

Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (позначають $\overline{a} \cdot \overline{b}$) називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi .$$

Властивості скалярного добутку:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.
2. $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \left(\lambda\overline{b}\right) = \lambda \cdot \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)$.
3. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$.
4. $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Означення. Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо рівність

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \ldots + k_n\overline{a}_n = 0 \tag{2.6}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $k_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$.

У протилежному випадку ця сукупність векторів є *лінійно залежною* – рівність

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \ldots + k_n\overline{a}_n = 0$$

виконується, якщо існує хоча б одне число $k_j \neq 0$. У цьому випадку маємо:

$$\overline{a}_j = \frac{k_1}{k_j}\overline{a}_1 + \ldots + \frac{k_{j-1}}{k_j}\overline{a}_{j-1} + \frac{k_{j+1}}{k_j}\overline{a}_{j+1} + \ldots + \frac{k_n}{k_j}\overline{a}_n ,$$

тобто вектор $\overline{a}_j$ лінійно виражається через інші вектори системи.

Базисом системи векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називають таку її підсистему, вектори якої лінійно незалежні, а будь-який вектор системи лінійно виражається через вектори підсистеми.

Будь-який базис множини векторів V_2, що компланарні площині, містить два неколінеарних вектори, а будь-який базис множини векторів простору V_3 містить три некомпланарних вектори.

Нехай $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ – три некомпланарних вектори, які утворюють базис у просторі V_3. Тоді для довільного вектора $\overline{a}$ цього простору існує єдина трійка чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, така, що

$$\overline{a} = \lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називають координатами вектора $\overline{a}$ у базисі $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ і записують так: $\overline{a}(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$.

У випадку V_2 кожний вектор виражається через два вектори базису і має дві координати.

Базис називається *ортонормованим*, якщо його базисні вектори попарно перпендикулярні та мають одиничну довжину. В просторі V_3 вони позначаються так: $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, а на площині $V_2 - \overline{i}, \overline{j}$.

У координатному вигляді зручно записати співвідношення між векторами та операції над ними.

Нехай маємо два вектора $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданими координатами в ортонормованому базисі. Тоді для них справедливі такі твердження:

1. Два вектора $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ однакові тоді і тільки тоді, коли однакові їхні відповідні координати: $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$.

2. Два вектори $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їхні відповідні координати пропорційні: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

3. $\overline{a} \pm \overline{b} = \overline{c}(a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3)$.

4. $\lambda\overline{a} = \overline{c}(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$.

5. $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

6. $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

7. $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$, де φ – кут між векторами.

Приклад. Нехай $\overline{x} = (2, 5, -3, 0)$; $\overline{y} = (-4, 2, 3, -1)$. Тоді

$$\overline{x} + \overline{y} = (2 + (-4), 5 + 2, -3 + 3, 0 + (-1)) = (-2, 7, 0, -1),$$

$$-2 \cdot \overline{x} = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 5, -2 \cdot (-3), -2 \cdot 0) = (-4, -10, 6, 0).$$

Отже, $\overline{x} + \overline{y} = (-2, 7, 0, -1)$, $-2 \cdot \overline{x} = (-4, -10, 6, 0)$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ та $\overline{y} = (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$ називається число

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... x_n y_n \qquad (2.2)$$

або

$$(\overline{x}, \overline{y}) = |\overline{x}||\overline{y}|\cos\alpha\ , \qquad (2.3)$$

де α – кут між векторами $\overline{x}$ та $\overline{y}$; $|\overline{x}|$ та $|\overline{y}|$ – модулі векторів, що визначаються рівностями

$$|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\ . \qquad (2.4)$$

Із означення скалярного добутку двох векторів можна вивести формулу, що визначає кут між векторами:

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{x}, \overline{y})}{|\overline{x}||\overline{y}|} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n +}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}}\ . \qquad (2.5)$$

Приклад. Знайти кут між векторами $\overline{x} = (2, 5, -3, 0)$; $\overline{y} = (-4, 2, 3, -1)$.

$$(\overline{x}, \overline{y}) = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = -8 + 10 + (-9) + 0 = -7,$$

$$|\overline{x}| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})} = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 25 + 9 + 0} = \sqrt{38},$$

$$|\overline{y}| = \sqrt{(\overline{y}, \overline{y})} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 4 + 9 + 1} = \sqrt{30},$$

$$\cos\alpha = \frac{-7}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{30}}.$$

Означення. Сукупність векторів векторного простору $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо рівність

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + ... + k_n\overline{a}_n = 0 \qquad (2.6)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $k_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n$.

У протилежному випадку ця сукупність векторів є лінійно залежною – рівність

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + ... + k_n\overline{a}_n = 0$$

виконується, якщо існує хоча б одне число $k_j \neq 0$. У цьому випадку маємо:

$$\overline{a}_j = \frac{k_1}{k_j}\overline{a}_1 + ... + \frac{k_{j-1}}{k_j}\overline{a}_{j-1} + \frac{k_{j+1}}{k_j}\overline{a}_{j+1} + ... + \frac{k_n}{k_j}\overline{a}_n,$$

тобто вектор $\overline{a}_j$ лінійно виражається через інші вектори.

Сукупність n векторів $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ розмірності n, координати яких є $\overline{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}),\ i = 1, 2, ..., n$, лінійно незалежна, якщо матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

складена із координат цих векторів невироджена, та лінійно залежна, якщо матриця A вироджена

Приклад. Нехай маємо сукупність векторів $\overline{a}_1 = (1, 3, 1)$, $\overline{a}_2 = (2, 1, 1)$, $\overline{a}_3 = (3, -1, 1)$. Перевірити на лінійну залежність цю сукупність векторів.

Обчислимо визначник матриці, складеної із координат векторів

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 9 - 3 + 1 - 6 = 0\,.$$

Отже, дана сукупність векторів є лінійно залежною.

Щоб встановити цю залежність запишемо систему однорідних рівнянь, породжену рівністю $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + k_3\overline{a}_3 = 0$:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ 3k_1 + k_2 - k_3 = 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{cases}$$

Необхідно знайти хоча б один ненульовий розв'язок системи рівнянь, яка має безліч розв'язків $|A| = 0$. Для знаходження розв'язку скористаємось методом Гауса. Для цього запишемо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній розширеній матриці системи відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \\ \qquad k_2 + 2k_3 = 0, \\ \qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Отримали систему двох рівнянь з трьома невідомими. У цьому випадку невідома k_3 є незалежною, може приймати довільні числові значення. Дві інші невідомі k_1, k_2 залежать від невідомої k_3 та визначаються через неї рівностями $k_2 = -2k_3$, $k_1 = k_3$. Якщо взяти $k_3 = 1$, то $k_1 = 1, k_2 = -2$, то одержимо таку залежність між векторами:

$$\overline{a}_1 - 2\overline{a}_2 + \overline{a}_3 = 0\text{, або } \overline{a}_1 = 2\overline{a}_2 - \overline{a}_3\,.$$

Приклад. Нехай маємо сукупність векторів $\overline{a}_1 = (3, 1, 1)$, $\overline{a}_2 = (1, 1, 1)$, $\overline{a}_3 = (1, -1, 1)$, $\overline{b} = (4, 2, 2)$. Показати, що три вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ утворюють базис тривимірного векторного простору. Розкласти вектор $\overline{b}$ за цим базисом.

Розв'язок. Три вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ – тривимірні. Якщо вони лінійно незалежні, то утворюють базис тривимірного векторного простору. Обчислимо визначник матриці, елементами якої є координати даних векторів –

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 + 1 - 1 + 3 - 1 = 4 \neq 0.$$

Отже, три вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ – лінійно незалежні і тому утворюють базис тривимірного векторного простору. По цим векторам можна однозначно розкласти будь-який інший вектор – $\overline{b} = k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + k_3\overline{a}_3$. Записавши по кожній координаті цю векторну рівність для коефіцієнтів розкладу отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 + k_3 = 4, \\ k_1 + k_2 - k_3 = 2, \\ k_1 + k_2 + k_3 = 2. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи рівнянь застосовуючи формули Крамера. Для цього обчислимо визначник матриці системи та три допоміжних визначника (див.   ) –

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1,\ k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1,\ k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0$. Розклад вектора $\overline{b}$ по базису $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ такий –

$$\overline{b}=\overline{a}_1+\overline{a}_2.$$

Безпосередня перевірка підтверджує правильність такої рівності.

6 ПИТАННЯ ПО ТЕМІ „*ВЕКТОРНА АЛГЕБРА*”

1. Означення, геометричне зображення та позначення вектора. Модуль вектора.
2. Нульові, одиничні, рівні, колінеарні, компланарні, протилежні вектори.
3. Лінійні операції над векторами: сума та різниця двох векторів (правила трикутника та паралелограма), добуток вектора на число.
4. Означення проекції вектора на вісь.
5. Прямокутна Декартові система координат на площині та у просторі.
6. Координати вектора.
7. Розклад вектора по ортам (базису) прямокутної системи координат.
8. Знаходження алгебраїчної суми векторів, заданих у координатній формі.
9. Правило множення вектора на число, який заданий своїми координатами.
10. Обчислення модуля вектора, який заданий своїми координатами.
11. Означення скалярного добутку двох векторів, його фізичний зміст.
12. Властивості скалярного добутку двох векторів.
13. Знаходження скалярного добутку двох векторів, заданих у координатній формі.
14. Умова ортогональності векторів.
15. Означення векторного добутку векторів.
16. Поняття правої трійки векторів.
17. Властивості векторного добутку векторів.
18. Умова колінеарності двох векторів.
19. Знаходження векторного добутку векторів, що задані у координатній формі.

20. Обчислення площі трикутника і паралелограма за допомогою векторного добутку.
21. Поняття мішаного добутку векторів. Його геометричний зміст.
22. Властивості мішаного добутку векторів.
23. Умова компланарності трьох векторів.

7 Математичний аналіз

7.1 Вступ до аналізу

Математичний аналіз являє собою частину математики, в якій функції і їх узагальнення вивчаються методами границь. Поняття границі тісно пов'язане з поняттям нескінченно малої величини, тому можна також сказати, що математичний аналіз вивчає функції та їх узагальнення методом нескінченно малих.

"Математичний аналіз" є скороченою назвою старої назви цієї частини математики – "Аналіз нескінченно малих". У класичному математичному аналізі об'єктами вивчення (аналізу) є перш за все функції. Розвиток математичного аналізу привів до можливості вивчення його методами більш складних утворень, ніж функція, функціоналів, операторів і т. д.

У природі та техніці зустрічаються зміни, рухи, які є першою ознакою того, що ми називаємо явищем, процесом. Закони явищ природи зазвичай описуються функціями. Звідси об'єктивна важливість математичного аналізу як засобу вивчення функцій .

Математичний аналіз у широкому розумінні цього терміна охоплює дуже велику частину математики. До нього входять диференціальне числення, інтегральне числення, теорія функцій дійсної змінної, теорія функцій комплексної змінної, наближення функцій, теорія диференціальних рівнянь, теорія інтегральних рівнянь, диференціальна геометрія, варіаційне числення, функціональний аналіз і деякі інші математичні науки.

Усе ж термін "математичний аналіз" часто застосовується для найменування лише основ математичного аналізу, які об'єднують у собі теорію дійсного числа, теорію границь, теорію рядів, диференціальне й інтегральне числення і їх безпосередні застосування, такі, як теорія максимумів та мінімумів, теорія неявних функцій, ряди Фур'є, інтеграли Фур'є.

7.2 Елементи теорії множин

Поняття множини. Поняття множини є первісним поняттям, тобто таким, якому не дається означення. Можна говорити про множину ***N*** усіх натуральних чисел, множину **Z** усіх цілих чисел, множину ***Q*** усіх раціональних чисел і т. д. Творець теорії множин Георг Кантор (1845-1919) розумів множину як зібрання певних та різних об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, які сприймаються в якості цілого.

Множина вважається визначеною, якщо про будь-який об'єкт, що розглядається, можна сказати, що він належить або не належить цій множині. Якщо деякий елемент ***X*** належить множині ***A***, то пишуть $x \in A$. Якщо елемент ***X*** не належить множині ***A***, то це записують так: $x \notin A$.

Нехай ***X***– деяка фіксована множина (іноді її називають основною) і ***P***– певна властивість, яку мають деякі елементи $x \in X$. Множина всіх елементів x, що належать множині ***X*** і мають властивість ***P***, позначається таким чином:

$$\{x \in X \mid P(x)\} \text{ або } \{x \in X : \mathrm{P}(\mathrm{x})\}.$$

Наприклад, якщо в значенні основної множини взяти множину ***Z***, то множина $\{x \in Z | x > 0\}$ є множиною натуральних чисел.

Якщо множина має скінченне число елементів, то її можна задати переліком її елементів, тобто записати $A = \{a, b, c, ..., k\}$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається знаком $\varnothing$.

Дії над множинами. Множина ***A*** називається підмножиною множини ***B***, якщо кожний елемент множини ***A*** є елементом множини ***B***, тобто якщо $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Якщо множина A є підмножиною множини ***B***, то пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$.

Для будь-якої множини ***A*** приймається, що $\varnothing \subset A$.

Множини ***A*** та ***B*** називаються рівними, якщо $A \subset B$ і $B \supset A$. Рівність множин позначається так: ***A=B***.

Об'єднанням (сумою) множин ***A*** та ***B*** називається множина ***C***, яка складається з елементів, кожен із яких належить множині ***A*** або множині ***B***. Об'єднання множин позначається так: $C = A \cup B$.

Перерізом (добутком) множин ***A*** і ***B*** називається множина ***C***, яка складається з елементів, кожен із яких належить як множині ***A,*** так і множині B. Записується: $C = A \cap B$.

Різницею множин ***A*** і ***B*** називається множина ***C***, яка складається з усіх тих елементів множини ***A***, які не належать множині ***B***. Різниця множин позначається так: $C = A \setminus B$.

Нехай ***X*** − основна множина і $A \subset X$. Доповненням до множини ***A*** називається множина $\overline{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{=} \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{A}$.

Правила двоїстості. Для будь-яких множин ***A*** і ***B*** мають місце співвідношення:

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Доведемо перше із співвідношень.

$$\boldsymbol{x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A} \text{ і } \boldsymbol{x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}} \text{ і } \boldsymbol{x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}}.$$

Отже, $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, тобто $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Аналогічно доводиться друге співвідношення.

Частково впорядковані множини. Нехай $\boldsymbol{M}$ − довільна множина і $\boldsymbol{\varphi}$ − деяке бінарне відношення в ній. Це відношення називається частковою впорядкованістю, якщо воно задовольняє умови:

1) рефлексивності: $a\varphi a$;

2) транзитивності: якщо $a\varphi b$ і $b\varphi c$, то $a\varphi c$;

3) антисиметричності: якщо $a\varphi b$ і $b\varphi a$, то $a=b$.

Часткова впорядкованість може позначатися символом $\leq$. Множина, в якій задано деяку часткову впорядкованість, називається частково впорядкованою. Запис $a\leq b$ означає, що елемент ***a*** не перевищує ***b*** або що він підпорядкований ***b***, передує ***b***, а ***b*** − не менше від ***a*** йде за ***a***.

У випадку, коли $a\leq b$ та $a\neq b$, користуються символом $<$, тобто пишуть $a<b$ і говорять, що ***a*** менше від ***b*** або що ***a*** строго підпорядковане ***b***.

Частково впорядкована множина, для будь-яких двох точок ***a, b*** якої існує точка ***c***, що йде за ними ($a\leq c$, $b\leq c$), називається напрямленою.

Приклади.

1. Множина всіх натуральних чисел частково впорядкована, якщо $a\leq b$ означає „***b*** ділиться на ***a*** без остачі".

2. Множина всіх підмножин деякої фіксованої множини частково впорядкована за включенням, якщо $M_1\leq M_2$ означає, що $M_1\subset M_2$.

3. Упорядкованою парою (***a , b***) є множина $\{\{a\},\{a,b\}\}$.

Нехай ***a, b*** − елементи частково впорядкованої множини. Може виявитися, що жодне із співвідношень $a\leq b$ і $b\leq a$ не має місця. У цьому випадку елементи ***a, b*** називаються непорівнянними. Тобто відношення порядку може бути визначеним лише для деяких пар елементів, тому й говориться про часткову впорядкованість. Якщо ж в частково впорядкованій множині ***M*** непорівняних елементів немає, то множина ***M*** називається впорядкованою (лінійно впорядкованою, цілком упорядкованою).

Декартовим добутком множин $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ називається множина впорядкованих n-ок:

$$\left\{ \left(m_1, m_2, \ldots, m_n \right) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2, \ldots, m_n \in M_n \right\}.$$

Застосовується позначення $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \qquad раз}$.

8 ЗАВДАННЯ ДО МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Варіант 1

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}} \cup \overline{\overline{B} \cap A}$.
2. Знайти результат виконання дій $(\overline{P} \cup Q) \setminus (P \cap \overline{Q})$, де $P = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{a, e\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $A = \left\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\right\}$, $B = \left\{1, 3, 5, 7, 9, 11\right\}$, $R = \left\{(a, b) \setminus a \in A, b \in B, a^2 + b^2 < 0\right\}$.

Варіант 2

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)}$.

2. Знайти результат виконання дій $(\overline{P}\setminus Q)\setminus(\overline{Q}\setminus P)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{[a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{знаряддя праці } b\}$, A = {скальпель, молоток, скрипка, голка, лінійка, віник, ножиці, рубанок}, B = {музикант, тесля, хірург, швачка, садівник, двірник}.

Варіант 3

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A\cup B}\cup\overline{\overline{A}}}\cap\overline{A\cup\overline{B}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P\cup Q)\cup\overline{R}}$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{[a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{дільник } b\}$, де $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, $B=\{3,4,10,16,18,42,49\}$

Варіант 4

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A\cup B\cup\overline{A}}\cup(A\cap\overline{B})}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(P\setminus\overline{Q}\right)\cup\overline{\left(\overline{Q}\setminus\overline{P}\right)}$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, 0\le a-b<5\}$, де $A=\{2,4,6,7,8,10,11\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$

Варіант 5

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\overline{\left(B\cup A\right)}}\cup\overline{A}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{\left(P\div Q\right)}\cup\left(R\div P\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{автор } b\}$, де A={Шевченко, Пушкін, Л. Українка, Толстой}, B={«Анна Кареніна», «Євген Онєгін», «Сон», «Війна і мир», «Гайдамаки»}.

Варіант 6

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup\overline{\left(\overline{A}\cap B\right)}}\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{\left(P\cap\overline{R}\right)}\cup\left(Q\cap\overline{R}\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо

$R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \left(a^2-b\right) \text{ ділиться на 2 без залишку}\right\}$, $A=\{1,3,5,7,8,9\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$.

4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f=\left(x_1\oplus\overline{x_2}\right)\vee\left(x_3\vee x_1\right)$.

Варіант 7

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{\overline{A}\cup B}\cup\left(\overline{B}\cap A\right)\cup\overline{A}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(U\setminus R)\cap\left(\overline{U\setminus Q}\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{столиця } b\}$, A={Київ, Лондон, Берлін, Москва, Париж, Рим}, B={Італія, Україна, Німеччина, Франція, Росія, Англія, Іспанія}.

Варіант 8

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A\cup B}\cup\overline{A\cap B}}\cup(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(\overline{U\cap R}\right)\cup\left(\overline{U}\div Q\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \sqrt{a}\ge\sqrt{b}\right\}$, $A=\{14,6,16,10,12,4,8\}$, $B=\{5,7,9,17,13,11,15\}$.

Варіант 9

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cup\left(A\cup\overline{B}\right)}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(Q\cup\left(\overline{R}\div\overline{Q}\right)\right)\setminus P$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \cos a<\cos b\}$, $A=\left\{\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right\}$, $B=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{16},\frac{\pi}{32}\right\}$.

Варіант 10

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\left(\overline{A\cap B}\right)\cup\overline{B}\cap\overline{\overline{\overline{A}}\cup B}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{((P\setminus R)\setminus Q)}\cap R$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.

3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, e^{a}<e^{b}\right\}$, $A=\left\{1,3,5,7,9,11,13\right\}$, $B=\left\{8,10,6,2,4,12\right\}$.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f=\left(\overline{x_1}\to x_2\right)\vee\left(\overline{x_2}\to x_3\right)$.

Варіант 11

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right)}\cup A$.
2. Знайти результат виконання дій $(P\div Q)\div\left(R\div\overline{P}\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{місяць пори року } b\right\}$, A={червень, травень, лютий, серпень, жовтень, січень, квітень, грудень}, B={зима, весна, літо, осінь}.

Варіант 12

1. Спростити вираз алгебри множин $A\cup\overline{B}\cap\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{B}\cup\overline{A}}$.
2. Знайти результат виконання дій $(P\div Q)\div\overline{R}$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, 0<3a-2b\le 18\right\}$, $A=\left\{2,4,6,8,10,11,12\right\}$, $B=\left\{1,3,5,7,9,11\right\}$.

Варіант 13

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{\overline{A\cap B}\cup\overline{A}\cup\overline{B}}\cup\overline{A}\cap B}$.
2. Знайти результат виконання дій $((P\setminus Q)\setminus R)\cup\left(U\cap\overline{R}\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \ln a>\ln b\right\}$, $A=\left\{2,4,6,8,10,3,7\right\}$, $B=\left\{1,3,5,9,11,13\right\}$.

Варіант 14

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{B}\cup\overline{(A\cap B)\cup\overline{\overline{B}\cup A}}\cap A$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(\overline{\overline{P}}\cap\overline{Q}\right)\cap(R\div Q)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.

3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \sin a\geq\cos b\}$,
$A=\left\{0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi,\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi\right\}$, $B=\left\{0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8},\pi,2\pi\right\}$.

Варіант 15

1. Спростити вираз алгебри множин $A\cup\overline{\overline{\overline{A}\cup B}\cup\overline{\overline{B}\cup A}\cap B}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(P\div\overline{Q}\right)\cap\left(R\div P\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$,
$R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \sin a\leq\cos b\}$,
$A=\left\{0,\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{2},\pi\right\}$, $B=\left\{\frac{3}{8}\pi,\frac{5}{8}\pi,\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{7}\right\}$.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f=\left(\left(x_1\setminus x_2\right)\downarrow\overline{x_2}\right)$.

Варіант 16

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{\overline{B}\cup A}\cup\overline{\overline{B\cap A}\cap B}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(\overline{\overline{\overline{P}}\cap Q}\right)\cup\left(\overline{P\setminus R}\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$,
$R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{свято пори року } b\}$,
A={Івана Купала, Новий рік, День перемоги, Різдво, День Незалежності України}, B={зима, весна, літо, осінь}.

Варіант 17

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap B}\cup\overline{\overline{A\cup B}\cup A}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(R\cup\overline{R}\right)\cap\left(\left(R\setminus P\right)\setminus\overline{Q}\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$,
$Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a/2>b/2\}$,
$A=\{3,6,7,9,11,20,24\}$, $B=\{4,6,12,8,10,18,2\}$.

Варіант 18

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{B}}\cup\overline{\overline{\overline{A}\cap B}\cup\left(\overline{A\cap B\cup\overline{A}}\right)}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(P\setminus\overline{\overline{R}}\right)\div\left(\overline{\overline{P}}\setminus Q\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$,
$R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.

3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{власна назва } b\}$,

A={Волга, Байкал, Дніпро, Еверест, Азія, Африка, Донецьк, Арарат, Львів}, B={озеро, річка, місто, гора, континент}.

4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f=\left(\overline{x_1}\to\overline{x_2}\right)\setminus\left(x_1\wedge x_3\right)$.

Варіант 19

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A\cap B}\cup\overline{\overline{B}\cap\overline{A}}}\cup\overline{B}\cap\overline{A}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(P\cap\overline{R}\right)\cup\left(Q\setminus U\right)$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{колір квітки } b\}$,

A={жовтий, білий, червоний, синій, зелений, рожевий}, B={троянда, конвалія, волошка, ромашка, тюльпан, мімоза}.

Варіант 20

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\overline{A}}\cup\overline{\overline{A\cup B}\cup\overline{\overline{A}}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(\overline{U\setminus Q}\right)\cap\left(U\div R\right)\cup P$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a-\text{річка, яка протікає на просторі } b\}$, A={Волга, Дніпро, Дон, Темза, Рона, Амазонка, Сена, Лена}, B={Україна, Англія, Росія, Франція, Бразилія}.

Варіант 21

1. Спростити вираз алгебри множин $A\cap\overline{\left(\overline{B}\cup A\right)\cap\overline{\left(\overline{A}\cup B\right)}}\cup\overline{B}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(\left(R\div\overline{Q}\right)\div\overline{P}\right)\cup R$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\left\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, \sqrt[3]{a+b}\le 2\right\}$,

$A=\{2,6,4,9,3,1\}$, $B=\{3,5,7,12,4,2\}$.

Варіант 22

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{\overline{A}\cup B}\cap\overline{B}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\left(P\cup\left(\overline{R\setminus Q}\right)\right)\div U$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.

3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, b-\text{дитина } a\}$, A={дід, баба, батько, мати}, B={онук, онука, син, дочка}.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f=(x_1\oplus x_2)\to(x_1\wedge\overline{x_3})$.

Варіант 23

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{B}\cap A\cup B}\cap\overline{\overline{A\cup B}\cap\overline{B}}$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{((R\div Q)\setminus\overline{P})}\cap R$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a \text{ має колір } b\}$, A={слива, яблуко, груша, лимон}, B={жовтий, зелений, червоний, синій, білий}.
4. Скласти таблицю істинності булевої функції $f=(x_2\wedge x_2)\oplus(x_3\vee\overline{x_1})$.

Варіант 24

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(B\cup A)\cap\overline{\overline{A}}\cup(A\cap\overline{B})}\cup B$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P\setminus Q)}\setminus\overline{(Q\cap R)}$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a \text{ є їжа } b\}$, A={капуста, риба, баранина, сир, свинина, морква}, B={вовк, кіт, миша, заєць, коза}.

Варіант 25

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{\overline{(A\cap B)\cup\overline{A}}\cap B}\cup A$.
2. Знайти результат виконання дій $\overline{(P\cup Q)}\setminus(R\cap\overline{P})$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a^3>b^3\}$, $A=\{2,3,6,7,9,1,20\}$, $B=\{4,6,12,8,10,18,2\}$.

Варіант 26

1. Спростити вираз алгебри множин $\overline{(A\cap\overline{B})\cup\overline{\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cup B)}}}$.

2. Знайти результат виконання дій $\left(\left(\overline{R}\setminus P\right)\cup\left(\overline{R}\setminus Q\right)\right)\setminus P$, де $P=\{a,b,c,d\}$, $Q=\{a,e\}$, $R=\{a,b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f\}$.
3. Задати бінарне відношення R на множинах A і B матричним, табличним та графічним способами, якщо $R=\{(a,b)\setminus a\in A, b\in B, a \text{ працює } b\}$, A={столяр, муляр, тесля, будівельник, токар}, B={фарба, стамеска, молоток, токарний станок, долото}.

8.1 Поняття відображення або функції

Нехай ***X*** і ***Y*** дві множини. Відображенням ***f*** множини ***X*** у множину ***Y*** називається правило, яке кожному елементу $x\in X$ ставить у відповідність один і тільки один елемент $y\in Y$.

Замість слова "відображення" можна вживати "функція", "оператор", "відповідність".

Записи $y=f(x)$, $X\xrightarrow{f}Y$, $f:X\to Y$ означають, що ***f*** є відображенням множини ***X*** у множину ***Y***.

Для позначення функції вживаються й інші букви, наприклад $y=g(x)$, $y=F(x)$.

Елемент ***y***, який відображення ***f*** ставить у відповідність елементу x, називається образом елемента x при відображенні ***f*** або значенням відображення ***f*** у точці x і позначається символом $f(x)$. Множина ***X*** називається областю визначення відображення ***f*** і позначається $D(f)$. Множина $R(x)=\{y\mid \exists x\in D(f): f(x)=y\}$ називається множиною значень відображення ***f***.

Нехай $f:X\to Y,\quad A\subset X,\qquad B\subset Y$. Образом множини ***A*** при відображенні ***f*** називається множина $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$. Прообразом множини B при відображенні f називається множина $f^{-1}(B)=\{x\in X\,|\,f(x)\in B\}$.

Графіком функції $f:X\to Y$ називається множина $G(f)=\{(x,y)\in X\times Y\,|\,x\in X, y=f(x)\}$.

Якщо $f:X\to Y$ і $g:Y\to Z$, то функція $h:X\to Z$, яка визначається формулами $h=g(f(x)),\qquad x\in X$ називається складеною функцією, або суперпозицією функцій ***f*** і ***g***.

Приклади. $y(x)=\sin x,\ g(y)=y^2,\quad h(x)=g(y(x))=\sin^2 x.$

Відображення $f:X\to Y$ називається відображенням множини ***X*** на множину Y або сур'єкцією, якщо $f(X)=Y$.

Відображення $f:X\to Y$ називається взаємооднозначним відображенням множини ***X*** у множину ***Y*** або ін'єкцією, якщо

$$\forall x_1\in X,\forall x_2\in X: x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2).$$

Відображення $f:X\to Y$, яке є сур'єкцією та ін'єкцією, називається бієкцією. У цьому випадку говорять, що f здійснює взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y.

Якщо $f:X\to Y$ – бієкція, то $\forall y\in Y\exists!x\in X: f(x)=y.$ Функція $f^{-1}:Y\to X$ називається оберненою до бієкції f, якщо $f(x)=y$ та $f^{-1}(y)=x$.

Відображення $f:N\to X$ називається послідовністю елементів із X. Послідовність позначається так: $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots,$ де $x_n=f(n)$ – n-ний член послідовності.

8.2 Потужність множин

Множина, яка складається із скінченного числа елементів, називається скінченною. Для скінченної множини A число її елементів позначається $|A|$. Скінченні множини можна порівнювати за кількістю їх елементів. Виникає питання, як можна порівнювати нескінченні множини? Г. Кантор побудував теорію, яка містить відповідь на поставлене питання. Вихідним пунктом цієї теорії є поняття потужності множини.

Множини A і B називаються рівнопотужними (мають однакову потужність), якщо існує бієкція $f: A \to B$. Рівнопотужні множини позначають так: $\boldsymbol{A \sim B}$.

8.2.1 Зчисленні множини

Множина A називається зчисленною, якщо $\boldsymbol{A \sim N}$. У цьому випадку говорять, що елементи множини A можна занумерувати.

Мають місце наступні твердження:

1. Нескінченна підмножина зчисленної множини зчисленна.
2. Нескінченна множина містить зчисленну підмножину.
3. Об'єднання зчисленної множини зчисленних множин є зчисленною множиною.
4. Декартів добуток двох зчисленних множин зчисленний.
5. Існують незчисленні множини.

Доведення першого і другого твердження досить прості. Їх пропонується виконати самостійно. Спинимось на доведенні твердження 3.

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n, ...$- зчисленні множини. Тоді для кожного $n \geq 1$ $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}, ...\}$.

Елементи об'єднання $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ цих множин можна подати у вигляді таблиці

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

і занумерувати, наприклад у порядку, вказаному стрілками. Цим саме буде встановлена бієкція $f:\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \to N$. Отже, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim N$.

Аналогічно доводиться твердження 4.

Нехай $A=\{a_1,a_2,...,a_n,...\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n,...\}$. Тоді декартів добуток $A\times B$ складається із пар, які можна розташувати в такому порядку

$$\begin{array}{ccccc}
(a_1,b_1) & (a_1,b_2) & .... & (a_1,b_n) & .... \\
(a_2,b_1) & (a_2,b_2) & .... & (a_2,b_n) & .... \\
.... & .... & .... & .... & ....,
\end{array}$$

і занумерувати так, як зроблено в попередньому випадку.

Для доведення твердження 5 застосуємо діагональний метод (діагональну процедуру) Кантора.

Нехай A − множина всіх можливих нескінченних ланцюгів, що складаються з двох символів, наприклад 0 і 1, вигляду $x=\left(0,1,1,...,0,...\right)$.

Покажемо, що множина A незчисленна. Припустимо, що елементи множини A занумеровані, тобто що множина A зчисленна. Нехай

$$\begin{aligned}
&x_1=\left(a_{11,}a_{12,},...,a_{1n,}...\right),\\
&x_2=\left(a_{21,}a_{22,},...,a_{2n,}...\right),\\
&.....................................\\
&x_n=\left(a_{n1,}a_{n2,},...,a_{nn,}...\right),\\
&......................................,
\end{aligned}$$

де кожне a_{ij} дорівнює 0 або 1. Утворимо елемент $y=\left(b_1,b_2,...,b_n,...,\right)$, поклавши $b_1\neq a_{11},b_2\neq a_{22},...,b_n\neq a_{nn}$, і кожне b_i відповідно дорівнює 0 або 1. Очевидно, що $y\in A$, але не збігається з жодним із занумерованих елементів $x_i\in A$. А це суперечить тому, що всі елементи множини A можна занумерувати.

8.3 Математична індукція

Математична індукція – це метод доведення математичних тверджень, який полягає у наступному: твердження $A\left(x\right)$, яке залежить від натурального параметра x, вважається доведеним, якщо доведено $A\left(1\right)$ і $\forall n\in N$ із припущення, що справедливе $A\left(n\right)$, доведено справедливість $A\left(n+1\right)$.

Доведення твердження $A\left(1\right)$ називається першим кроком індукції (базисом індукції), а доведення $A\left(n+1\right)$ за припущення справедливості $A\left(n\right)$ називається індуктивним переходом. При цьому x називається параметром індукції, а припущення $A\left(n\right)$ при доведенні $A\left(n+1\right)$ називається індуктивним припущенням.

Нехай A – зчисленна множина і для $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{N}$

$$n \in N \qquad A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A, 1 \le i \le n\}$$

є множина впорядкованих **n**-членних ланцюгів. Тоді за твердженням 4 і методом (принципом) математичної індукції A^n є зчисленною множиною $\forall n \in N$.

8.4 Дійсні числа

Уведемо аксіоматичне означення дійсних чисел. Із шкільного курсу математики відомо, що множина дійсних чисел складається із множини раціональних та ірраціональних чисел. Раціональним називається число, яке можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{p}{q}$, де $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ − цілі числа, причому $q \ne 0$. Ірраціональним називається число, яке не є раціональним. Будь-яке раціональне число є або цілим, або скінченним чи нескінченним періодичним десятковим дробом. Ірраціональні числа – це нескінченні періодичні десяткові дроби. Виявлення ірраціональних чисел пов'язане з установленням у школі Піфагора (570-496 р. до н. е.) несумірності діагоналі квадрата і його сторони, тобто з установленням того факту, що довжина діагоналі квадрата не може бути виражена раціональним числом, якщо в значенні одиниці вимірювання взяти довжину сторони квадрата.

Ми дамо аксіоматичне означення множини дійсних чисел.

Множиною дійсних чисел називається множина елементів, для яких виконуються наступні аксіоми.

8.4.1 Аксіоми додавання і множення

Для будь-якої пари a та b дійсних чисел однозначно виражене число $a+b$, яке називається їх сумою.

Для будь-якої пари a і b дійсних чисел однозначно виражене число $a \cdot b$, яке називається їх добутком.

Для будь-яких дійсних чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ виконуються наступні аксіоми:

1^0. $a+b=b+a.$

2^0. $a+(b+c)=(a+b)+c.$

3^0. $a \cdot b=b \cdot a.$

4^0. $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c.$

5^0. $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c.$

6^0. Існує єдине число 0, таке, що $a+0=a$ для будь-якого числа a.

7^0. Для будь-якого числа a існує таке число $(-a)$, що $a+(-a)=0$ (число $(-a)$ називається протилежним числу a).

8^0. Існує єдине число 1, таке, що $a \cdot 1=a$ для будь-якого числа a.

9^0. Для будь-якого числа $a \neq 0$ існує таке число a^{-1}, що $a \cdot a^{-1}=1$; число a^{-1} позначається також символом $\frac{1}{a}$ і називається оберненим до a.

8.4.2 . Аксіоми порівняння дійсних чисел

Для будь-яких дійсних чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ установлене одне із співвідношень: $a=b,\ a>b,\ b>a.$

Відношення "=" має властивість: якщо $a=b$ і $b=c$, то $a=c$.

Для будь-яких дійсних чисел $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ виконуються наступні аксіоми:

10^0. Якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$.

11^0. Якщо $\boldsymbol{a>b}$, то $\boldsymbol{a+c>b+c}$.

12^0. Якщо $\boldsymbol{a>b}$ і $\boldsymbol{b>0}$, то $\boldsymbol{a \cdot b>0}$.

Зауваження. Замість $a > b$ пишуть $b < a$.

8.4.3 Аксіома неперервності дійсних чисел

13^0. Нехай X і Y – дві множини, які складаються із дійсних чисел. Тоді, якщо $\forall x \in X, \forall y \in Y$, виконується нерівність $x \le y$, то існує принаймні одне дійсне число C, для якого виконується нерівність $x \le C \le y$.

Зауваження. У множині лише раціональних чисел аксіома неперервності не виконується. Дійсно, нехай X складається із множини раціональних чисел, таких, що $x < \sqrt{2}$, а Y − із множини раціональних чисел $y > \sqrt{2}$. Тоді $\forall x \in X, \forall y \in Y$ виконується нерівність $x \le y$. Проте не існує раціонального числа C, такого, щоб $\forall x \in X, \forall y \in Y$ виконувалася б нерівність $x \le C \le y$. Таким числом могло бути лише число $\sqrt{2}$, а воно, як відомо, ірраціональне.

8.4.4 Деякі властивості дійсних чисел

Наведемо деякі властивості дійсних чисел.

1. Число $x = b + (-a)$ є розв'язком рівняння $a + x = b$.

Доведення. Підставимо в дане рівняння замість x його значення:

$a + b + (-a) = b$.

Згідно з 1^0 $a + (-a) + b = b$.

Згідно з 2^0 $(a + (-a)) + b = b$.

Згідно з 7^0 $0 + b = b$.

Згідно з 6^0 $b = b$.

Зауваження. Число $b + (-a)$ називається різницею чисел a та b і позначається $b - a$. Зазначимо, що за умови $b > a$ різниця $b - a > 0$. Дійсно, якщо $b > a$, то за 11^0. Одержуємо $b + (-a) > a + (-a)$, далі за 7^0. Маємо $b + (-a) > 0$, тобто $b - a > 0$.

2. Число $x = b \cdot a^{-1}$ є розв'язком рівняння $a \cdot x = b$, якщо $a \neq 0$.

Доведення. Підставимо в дане рівняння значення x:

$a \cdot b \cdot a^{-1} = b$.

Згідно з 3^0 $a \cdot a^{-1} b = b$.

Згідно з 4^0 $\left(a \cdot a^{-1}\right) b = b$.

Згідно з 9^0 $1 \cdot b = b$.

Згідно з 8^0 $b = b$.

Зауваження. Число $b \cdot a^{-1}$ називається часткою чисел a й b і позначається $\dfrac{b}{a}$ або $b : a$.

3. Якщо $a < b$, то $-a > -b$.

Дійсно, оскільки $a < b$, то $b - a > 0$. Отже, за 11^0 $b - a + (-b) > 0 + (-b)$, звідки одержуємо $-a > -b$.

Зокрема, якщо $a > 0$, то $-a < 0$, а якщо $a < 0$, то $-a > 0$.

Дійсно, згідно з 6^0 $(-0) + 0 = -0$, далі за 7^0 $(-0) + 0 = 0$. Отже,

0= − 0.

4. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Дійсно, якщо $a > b$ і $c > d$, то за 11^0 $a + c > b + c$, $c + b > d + b$. Далі згідно з 10^0 $a + c > b + d$.

5. Якщо $a < b$ та $c > d$, то $a - c < b - d$.

Дійсно, якщо $c > d$, то згідно з 16^0 $-c < -d$ і за 4 одержуємо: $a - c < b - d$.

6. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=0$.

Це випливає з того, що $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

7. $\boldsymbol{a}\cdot 0=0$.

Справді, $\boldsymbol{a}\cdot 0=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

8. $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

Дана рівність доводиться так: $-(-\boldsymbol{a})=(-(-\boldsymbol{a}))+(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

9. $(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

Доведення:

$(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=((-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$
$=0-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$

Зокрема, $(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

10. Якщо $\boldsymbol{a}<0$ і $\boldsymbol{b}>0$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$.

Дійсно, оскільки $\boldsymbol{a}<0$, то $-\boldsymbol{a}>0$, а тому $(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}>0$ (згідно з 12^0).

Отже, $(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$, а звідси $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$.

11. Якщо $\boldsymbol{a}<0$ та $\boldsymbol{b}<0$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$.

Справді, оскільки $\boldsymbol{b}<0$, то $-\boldsymbol{b}>0$, а тому $(-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}<0$ (згідно з 10^0).

Отже, $(-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$, а звідси маємо $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$.

12.Якщо $\boldsymbol{a}\neq 0$, то $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2>0$.

Це випливає з 12^0 і 11.

За властивістю 12^0 маємо: $1=1\cdot 1=1^2>0$, тобто $1>0$.

Надалі будемо використовувати й інші властивості дійсних чисел, не спиняючись на їх формальному доведенні.

Властивість. *Із означення множини дійсних чисел випливає, що ця множина впорядкована.*

Множину дійсних чисел позначатимемо буквою $\boldsymbol{R}^1$.

8.5 Поняття відображення або функції

Нехай $\boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{Y}$ дві множини. Відображенням $\boldsymbol{f}$ множини $\boldsymbol{X}$ у множину $\boldsymbol{Y}$ називається правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$.

Замість слова "відображення" можна вживати "функція", "оператор", "відповідність".

Записи $y = f(x)$, $X \xrightarrow{f} Y$, $f : X \to Y$ означають, що $\boldsymbol{f}$ є відображенням множини $\boldsymbol{X}$ у множину $\boldsymbol{Y}$.

Для позначення функції вживаються й інші букви, наприклад $y = g(x)$, $y = F(x)$.

Елемент $\boldsymbol{y}$, який відображення $\boldsymbol{f}$ ставить у відповідність елементу x, називається образом елемента x при відображенні $\boldsymbol{f}$ або значенням відображення $\boldsymbol{f}$ у точці x і позначається символом $f(x)$. Множина $\boldsymbol{X}$ називається областю визначення відображення $\boldsymbol{f}$ і позначається $D(f)$. Множина $R(x) = \{ y \mid \exists x \in D(f) : f(x) = y \}$ називається множиною значень відображення $\boldsymbol{f}$.

Нехай $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Образом множини $\boldsymbol{A}$ при відображенні $\boldsymbol{f}$ називається множина $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$. Прообразом множини B при відображенні f називається множина $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$.

Графіком функції $f:X\to Y$ називається множина $G(f)=\{(x,y)\in X\times Y\mid x\in X, y=f(x)\}$.

Якщо $f:X\to Y$ і $g:Y\to Z$, то функція $h:X\to Z$, яка визначається формулами $h=g(f(x))$, $x\in X$ називається складеною функцією, або суперпозицією функцій $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{g}$.

Приклади. $y(x)=\sin x,\ g(y)=y^2,\quad h(x)=g(y(x))=\sin^2 x.$

Означення. Відображення $f:X\to Y$ називається відображенням множини $\boldsymbol{X}$ на множину Y або **сур'єкцією**, якщо $f(X)=Y$.

Означення. Відображення $f:X\to Y$ називається **взаємооднозначним** відображенням множини $\boldsymbol{X}$ у множину $\boldsymbol{Y}$ або **ін'єкцією**, якщо

$$\forall x_1\in X,\forall x_2\in X: x_1\neq x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)\neq f(x_2).$$

Означення. Відображення $f:X\to Y$, яке є сур'єкцією та ін'єкцією, називається **бієкцією**. У цьому випадку говорять, що f здійснює взаємно однозначну відповідність між множинами X і Y.

Якщо $f:X\to Y-$ бієкція, то $\forall y\in Y\exists! x\in X: f(x)=y.$ Функція $f^{-1}:Y\to X$ називається оберненою до бієкції f, якщо $f(x)=y$ та $f^{-1}(y)=x$.

Відображення $f:N\to X$ називається послідовністю елементів із X. Послідовність позначається так: $x_1,x_2,...,x_n,...,$ де $x_n=f(n)$ − n-ний член послідовності.

4.3.1.6. Потужність множин

Множина, яка складається із скінченного числа елементів, називається скінченною. Для скінченної множини A число її елементів позначається $|A|$. Скінченні множини можна порівнювати за кількістю їх елементів. Виникає питання, як можна порівнювати нескінченні множини? Г. Кантор побудував теорію, яка містить відповідь на поставлене питання. Вихідним пунктом цієї теорії є поняття потужності множини.

Множини A і B називаються рівнопотужними (мають однакову потужність), якщо існує бієкція $f: A \to B$.

Рівнопотужні множини позначають так: $\boldsymbol{A \sim B}$.

8.5.1 Математична індукція

Математична індукція – це метод доведення математичних тверджень, який полягає у наступному: твердження $A(x)$, яке залежить від натурального параметра x, вважається доведеним, якщо доведено $A(1)$ і $\forall n \in N$ із припущення, що справедливе $A(n)$, доведено справедливість $A(n+1)$.

Доведення твердження $A(1)$ називається першим кроком індукції (базисом індукції), а доведення $A(n+1)$ за припущення справедливості $A(n)$ називається індуктивним переходом. При цьому x називається параметром індукції, а припущення $A(n)$ при доведенні $A(n+1)$ називається індуктивним припущенням.

Нехай A – зчисленна множина і для $\boldsymbol{n \in N}$

$$n \in N \qquad A^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A, 1 \le i \le n\}$$

є множина впорядкованих ***n***-членних ланцюгів. Тоді за твердженням 4 і методом (принципом) математичної індукції A^n є зчисленною множиною $\forall n \in N$.

8.6 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

8.6.1 Означення числової послідовності

Означення. Числовою послідовністю називається відображення $f: N \to R^1$.

Отже, якщо кожному натуральному числову n поставлено у відповідність дійсне число x_n, то множина дійсних чисел

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad (1)$$

називається числовою послідовністю.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ називаються елементами (або членами) послідовності. Символ x_n називається загальним елементом послідовності, а $n-$ його номером. Скорочено послідовність (1) позначається так: $\{x_n\}$. Наприклад, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ є послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

Послідовність вважається заданою, якщо вказано правило, за яким кожному натуральному числові n поставлено у відповідність дійсне число x_n. Найчастіше числову послідовність задають формулою загального ($n-$го) члена послідовності: $x_n = f(n)$. Наприклад, формула $x_n = \frac{n-1}{n}$ задає числову послідовність

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n-1}{n}, ...$$

Числову послідовність можна задати рекурентною формулою, тобто формулою, в якій указується правило, за котрим можна виразити наступний її член через попередні. Наприклад, арифметична прогресія з першим членом a_1 та різницею d визначається рекурентною формулою

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ або } a_n = a_1 + (n-1)d .$$

Рекурентною формулою

$$y_1 = 1, y_2 = 1, y_n = y_{n-1} + y_{n-2}, n = 3,4,5,...$$

задається послідовність

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,…,

що відома в математиці як " ряд Фібоначчі", а її члени – як числа Фібоначчі. Ці числа мають ряд цікавих властивостей. Нині вони використовуються при обробці інформації на ЕОМ, при відшуканні оптимальних методів програмування тощо.

8.6.2 Арифметичні дії над числовими послідовностями

Нехай задано послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$.

Добутком послідовності $\{x_n\}$ на число m називається послідовність $\{mx_n\}$, тобто

$$mx_1, mx_2, ..., mx_n, ...$$

Сумою послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ називається послідовність $\{x_n + y_n\}$:

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...;$$

різницею – послідовність $\{x_n - y_n\}$:

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n, ...;$$

добутком – послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$:

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, ..., x_n \cdot y_n, ...;$$

часткою – послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$:

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...; \text{ де } y_n \neq 0 \ \forall n \in N.$$

8.6.3 Обмежені і необмежені числові послідовності

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху, якщо існує таке число M, що для всіх її членів x_n виконується нерівність $x_n \leq M$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою знизу, якщо існує таке число m, що для всіх її членів x_n виконується нерівність $x_n \geq m$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо вона обмежена зверху й знизу.

Нехай послідовність $\{x_n\}$ обмежена, тобто існують такі числа M і m, що для будь-якого її члена x_n виконується нерівність $m \leq x_n \leq M$. Нехай $A = \max(|m|, |M|)$. Тоді умову обмеженості послідовності можна записати так: $|x_n| \leq A$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається ***необмеженою***, якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує елемент x_n цієї послідовності, для якого виконується нерівність $|x_n| > A$.

Зауваження. Необмежена послідовність може бути обмеженою зверху або знизу.

Приклади.

Послідовність $1, 2, 4, ..., 2n, ...$ обмежена знизу ($1 \leq x_n = 2n$), але не обмежена зверху.

Послідовність $-1, -2, -3, ..., -n$ обмежена зверху ($x_n = -n \leq 1$), але не обмежена знизу.

Послідовність $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} ..., \frac{n}{n+1}, ..$ обмежена зверху і знизу ($\frac{1}{2} \leq x_n < 1$).

Послідовність $-1, 2, -3, 4, ..., (-1)^n \cdot n, ...$ не обмежена.

8.6.4 Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого числа $A > 0$ існує такий номер N, що для всіх елементів x_n з номером $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$.

Зауваження. У наведеному означенні номер N залежить від числа A, тобто $N = N(A)$.

Очевидно, що всяка нескінченно велика послідовність є необмеженою, проте не всяка необмежена послідовність є нескінченно великою. Наприклад, необмежена послідовність **0, 1, 0, 2, 0, 3, ..., *n*, 0, *n*+1, …** не є нескінченно великою, оскільки не існує такого номера N, щоб для всіх x_n, де $n > N$ виконувалася б, наприклад, нерівність $|x_n| > 1\,(A = 1)$.

Приклад 1. Показати, що послідовність $\{2n\}$ є нескінченно великою.

Нехай маємо довільне число $A > 0$. Із нерівності $|x_n| = |2n| > A$ або $n \geq \left[\frac{A}{2}\right] + 1$. Так у випадку $A = 200$ ми отримуємо $n \geq 101$.

Означення. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого (як завгодно малого) числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх елементів x_n з номером $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Зауваження. У наведеному означенні номер N залежить від числа ε, тобто $N = N(\varepsilon)$.

Приклад 2. Показати, що послідовність $\{n^2\}$ є нескінченно великою.

Нехай маємо довільне число $A > 0$. Із нерівності $|x_n| = |n^2| > A$ або $n > \sqrt{A}$.

Покладемо $N = \left[\sqrt{A}\right] + 1$ ($[a] -$ *ціла частина числа a*).

Тоді $|X_N| = \left(\left[\sqrt{A}\right] + 1\right)^2$. Оскільки $\sqrt{A} < \left[\sqrt{A}\right] + 1$, то $A < \left(\left[\sqrt{A}\right] + 1\right)^2$. Отже, при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$.

Приклад 3. Показати, що послідовність $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ є нескінченно малою.

Нехай маємо довільне число $\varepsilon > 0$. Із нерівності $|\alpha_n| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$ одержуємо $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, тепер добудемо корінь з обох частин нерівності $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Покладемо $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. Тоді для всіх $n > N$ маємо $n \geq \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, тобто $\sqrt{\varepsilon} > \frac{1}{n}$ або $\varepsilon < \frac{1}{n^2} = |\alpha_n|$.

Теорема. Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність і всі її члени відмінні від нуля, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала, і, навпаки, якщо $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність й $\alpha_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ нескінченно велика.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і покладемо $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Оскільки $\{x_n\}$ нескінченно велика послідовність, то для вказаного A існує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > A$. Звідси маємо $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| = \dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{1}{A} = \varepsilon$. Отже, послідовність $\left|\dfrac{1}{x_n}\right|$ – нескінченно мала.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

8.6.5 Збіжні послідовності

Границя числової послідовності. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ із номером $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon . \tag{2}$$

Якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a ,$$

а саму послідовність називають збіжною.

Послідовність, яка не є збіжною, називається розбіжною.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Доведення. Задамо довільне число $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує таке натуральне число N, що для всіх членів послідовності $\{x_n\}$ із номером $n>N$ виконується нерівність $|x_n-1|<\varepsilon$.

Оскільки $x_n=\frac{n}{n+1}$, то

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon .$$

Розв'язавши відносно n нерівність $\frac{n}{n+1}<\varepsilon$, маємо $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Якщо в значенні N узяти цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}-1$, тобто покласти $\boldsymbol{N}=\left[\frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}}-1\right]$, то нерівність $|x_n-1|<\boldsymbol{\varepsilon}$ виконується для всіх $n>N$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то будь-який її елемент x_n можна подати у вигляді $x_n=a+\alpha_n$, де α_n - елемент нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n\}$.

Дійсно, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то послідовність $\{x_n-a\}=\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою, оскільки для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий номер N, що для $n>N$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$, тобто $|\alpha_n|<\varepsilon$.

Має місце й обернене твердження. Якщо x_n можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Нерівність (2) рівносильна нерівності $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$,

із якої випливає, що x_n знаходиться в $\varepsilon -$околі точки a. Отже, означення границі числової послідовності можна дати наступним чином.

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що всі члени послідовності $\{x_n\}$ із номером $n > N$ знаходяться в $\varepsilon -$околі точки a.

Очевидно, що нескінченно велика послідовність не має границі. Іноді говорять, що вона має нескінченну границю і пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

Якщо при цьому, починаючи з деякого номера, всі члени послідовності додатні (від'ємні), то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \right)$.

Усяка нескінченно мала послідовність α_n збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Це безпосередньо випливає з означення границі числової послідовності й означення нескінченно малої числової послідовності.

8.6.6 Властивості збіжних послідовностей

Теорема. Збіжна послідовність має єдину границю.

Доведення. Припустимо, що збіжна послідовність $\{x_n\}$ має дві різні границі a і b, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, a \neq b$. Тоді $x_n = a + \alpha_n$ та $x_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – елементи нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$. Отже, $a + \alpha_n = b + \beta_n$ або $a - b = \beta_n - \alpha_n$. Оскільки $\beta_n - \alpha_n$, за властивістю нескінченно малих послідовностей, є елементами нескінченно малої послідовності, а $\boldsymbol{a-b}$ постійне число, то $a-b=0$. Таким чином, $a=b$.

Теорема. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то вона обмежена.

Доведення. Нехай $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}$ і N - номер, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$. Тоді

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|$$

для всіх $n > N$. Виберемо $A = \max\{\varepsilon + |a|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|\}$. За цієї умови $|x_n| < A$ для будь-якого $n \in N$.

Зазначимо, що не всяка обмежена послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність $-1,1,-1,1,...,(-1)^n,...$ обмежена, але не збіжна.

Теорема 2.6. Якщо $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – збіжні послідовності, то:

1. Послідовність $\{x_n \pm y_n\}$, яка є сумою (різницею) збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, збіжна і її границя дорівнює сумі (різниці) границь цих послідовностей, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. Послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$, яка є добутком збіжних послідовностей $\{x_n\}$ й $\{y_n\}$, збіжна і її границя дорівнює добутку границь цих послідовностей, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. Послідовність $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$, яка є часткою збіжних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, за умови $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, збіжна і її границя дорівнює частці границь цих послідовностей, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0)$.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ – збіжні послідовності та $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді $x_n = a + \alpha_n$ і $y_n = b + \beta_n$, де $\boldsymbol{\alpha_n}$ й $\boldsymbol{\beta_n}$ – елементи нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$. Покажемо, що має місце:

1) $x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)$.

Оскільки $(\boldsymbol{\alpha_n \pm \beta_n})$ є елементами нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, то звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$.

Оскільки $\boldsymbol{a \cdot b + b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n}$ є елементами нескінченно малої послідовності $\{a \cdot b + b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n\}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) $$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b} = \frac{(a + \alpha_n) \cdot b - (b + \beta_n) \cdot a}{y_n \cdot b} =$$

$$= \frac{a \cdot b + b \cdot \alpha_n - a \cdot b - a \cdot \beta_n}{y_n \cdot b} = \frac{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n}{y_n \cdot b} = \frac{1}{y_n} \cdot \frac{b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n}{b} =$$

$$= \frac{1}{y_n} \cdot \left(\alpha_n - \frac{a}{b} \cdot \beta_n \right).$$

Послідовність $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\cdot\beta_n\right\}$ є нескінченно малою. Покажемо, що послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ обмежена. Оскільки $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b}$ і $b \neq 0$, то для $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$,

отже, $|y_n| = |b - b + y_n| = |b - (b + y_n)| \geq |b| - |b - y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$, тобто $|y_n| > \frac{|b|}{2}$, а тому $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leq \frac{2}{|b|}$ для всіх $n > N$. Звідси випливає, що послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ обмежена.

Таким чином, послідовність $\left\{\alpha_n - \frac{a}{b}\cdot\beta_n\right\}$ нескінченно мала, а тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b},$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \text{ де } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Зауваження. Пункт 1) наведеної теореми допускає узагальнення на довільне скінченне число доданків. Пункт 2) - на довільне скінченне число множників. Із пункту 2) випливає, що постійний множник можна виносити за знак границі, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(C\cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} C \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = C\cdot\lim_{n\to\infty} x_n.$$

8.6.7 Невизначені вирази.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Виникає питання, що можна сказати про границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$? Виявляється, що ця границя залежно від окремого закону поведінки змінних x_n та y_n може приймати різні значення або взагалі не існувати.

Приклади.

1. Якщо $x_n = \frac{1}{n^2}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

2. Якщо $x_n = \frac{1}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

3. Якщо $x_n = \frac{c}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

4. Якщо $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, то $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ не існує.

Отже, лише значення границь числових послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ не дозволяє у розглянутому вище випадку робити висновки про значення границі їх відношення. Для того, щоб схарактеризувати цю особливість, говорять, що за умови $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$ є невизначеністю типу $\dfrac{0}{0}$.

Аналогічно невизначеними виразами є:

а) у випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$ вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$ є невизначеністю типу $\dfrac{\infty}{\infty}$;

б) у випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \pm\infty$ вираз $x_n \cdot y_n$ є невизначеністю типу $0 \cdot \infty$;

в) у випадку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ вираз $x_n - y_n$ є невизначеністю типу $\infty - \infty$.

Для визначення границь невизначених виразів $\dfrac{x_n}{y_n}$ типу $\dfrac{\infty}{\infty}$ часто може застосовуватися теорема Штольца, яку ми наведемо без доведення

Теорема. Якщо послідовності x_n, y_n такі, що

1) починаючи з деякого номера n $\quad y_{n+1} > y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;

3) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$,

то $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

8.7 Основні властивості неперервних функцій

Теорема Больцано-Коші (теорема про перетворення функції в нуль). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на його кінцях значення функції мають різні знаки. Тоді існує точка $C\in(a,b)$ така, що $f(C)=0$.

Доведення. Нехай для визначеності $f(a)<0, f(b)>0$. Розділимо відрізок $[a,b]$ навпіл. Якщо $f\left(\frac{b-a}{2}\right)=0$, то теорема доведена. Якщо $f\left(\frac{b-a}{2}\right)\neq 0$, то виберемо ту половину відрізка $[a,b]$, на кінцях якої функція $f(x)$ має значення різних знаків, і позначимо її $[a_1,b_1]$, $f(a_1)<0;\quad f(b_1)>0$. Розділимо відрізок $[a_1,b_1]$ навпіл. Якщо $f\left(\frac{b_1-a_1}{2}\right)=0$, то теорема доведена, в іншому випадку виберемо ту половину відрізка $[a_1,b_1]$, на кінцях якої функція $f(x)$ має значення різних знаків, та позначимо її $[a_2,b_2]$, $f(a_2)<0,\quad f(b_2)>0$. Якщо цей процес продовжувати необмежено, то або на якомусь k-ому кроці значення функції в середині відрізка $[a_k,b_k]$ буде рівним нулю і тоді теорема доведена, або одержимо послідовність вкладених відрізків

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots,$$

таких, що $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$ і на кінцях кожного з відрізків $[a_n,b_n]$ функція $f(x)$ має значення різних знаків, $\boldsymbol{f(a_n)<0; f(b_n)>0}$.

За теоремою про вкладені відрізки існує точка C, яка належить кожному із відрізків $[a_n,b_n]$ і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=C$. Ураховуючи неперервність функції $f(x)$ (зокрема в точці C), маємо $f(C)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\le 0;\qquad f(C)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$.

Звідси одержуємо $f(C)=0$.

Друга теорема Больцано-Коші (теорема про проміжне значення). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення $f(a)=A,\quad f(b)=B,$ де $A\neq B$. Тоді для будь-якого числа $C\in(A,B)$ існує точка $c\in(a,b)$ така, що $f(c)=C$.

Доведення. Нехай для визначеності $A<B$. Розглянемо допоміжну функцію

$\varphi(x)=C-f(x)$. Ця функція неперервна на відрізку $[a,b]$ і

$$\varphi(a)=C-f(a)=C-A>0,\ \varphi(b)=C-f(b)=C-B<0.$$

За першою теоремою Больцано-Коші існує точка $c\in(a,b)$ така, що $\varphi(c)=0$. Але $\varphi(c)=C-f(c)$. Отже, $C-f(c)=0$, тобто $f(c)=C$.

Перша теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Припустимо, що вона на відрізку $[a,b]$ не обмежена. Поділимо відрізок $[a,b]$ пополам і виберемо ту його частину, де функція $f(x)$ не обмежена. Позначимо її $[a_1,b_1]$. Відрізок $[a_1,b_1]$ також поділимо пополам і виберемо ту його частину, де функція $f(x)$ не обмежена. Позначимо вибрану половину $[a_2,b_2]$. Продовжуючи необмежено цей процес, одержимо послідовність вкладених відрізків

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots,$$

таких, що $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. За теоремою про вкладені відрізки існує точка C, яка належить кожному із них і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = C$. За означенням границі послідовності для будь-якого числа ε >0 існує такий номер N_1, що при $n > N_1 \left|a_n - c\right| < \varepsilon$; з іншого боку, існує такий номер N_2, що при $n > N_2$ $\left|b_n - c\right| < \varepsilon$. Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконуються нерівності: $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon,\ \ c - \varepsilon < b_n < c + \varepsilon$, тобто всі відрізки $[a_n, b_n]$, де $n > N$ попадають в інтервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Таким чином, функція $f(x)$ не обмежена в деякому ε-околі точки c. Але це неможливо, оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, а значить, неперервна і в точці $c \in (a, b)$, тобто в точці c існує скінченна границя функції $f(x)$, а тому в околі цієї точки вона обмежена.

Друга теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх точних меж, тобто існують такі точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, що

$$f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x),\ \ f(x_1) = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. За першою теоремою Вейєрштрасса функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ обмежена. Отже, вона має точну верхню межу $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = M$ і точну нижню межу $\inf\limits_{[a,b]} f(x) = m$. Покажемо, що існує точка $x_1 \in [a,b]$ така, що $f(x_1) = M$. Припустимо, що в жодній точці відрізка $[a, b]$ функція $f(x)$ не приймає значення, рівного M, тобто для всіх точок $x \in [a, b]$ $f(x) < M$. Складемо допоміжну функцію $F(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$. Ця функція на відрізку $[a, b]$ неперервна, а тому обмежена. Отже, існує число μ таке, що для всіх $x\in[a,b]$ $F(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}\le\mu$.

Із цієї нерівності маємо: $f(x)=M-\dfrac{1}{\mu}$. Таким чином, $\boldsymbol{M-\dfrac{1}{\mu}}$ – верхня межа функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Але це суперечить тому, що число M – точна верхня межа цієї функції на відрізку $[a,b]$. Звідси випливає, що зроблене припущення неправильне, тобто існує точка $x_1\in[a,b]$ така, що $f(x_1)=M$.

Друга частина теореми доводиться аналогічно.

Зауваження. Точна верхня межа функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a,b]$, називається її найбільшим (максимальним) значенням на цьому відрізку, а точна нижня межа – її найменшим (мінімальним) значенням. Різниця $\omega=M-m$, де $M=\max\limits_{[a,b]}f(x)$, $m=\min\limits_{[a,b]}f(x)$, називається коливанням функції на відрізку $[a,b]$.

Теорема Больцано-Вейєрштрасса

Теорема. Із будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ обмежена, тобто існує такий відрізок $[a,b]$, що для всіх x_n виконується нерівність $a_n\le x_n\le b_n$. Поділимо відрізок $[a,b]$ пополам. Тоді принаймні в одній половині буде міститися нескінченна множина елементів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо цю половину $[a_1,b_1]$. Поділимо тепер відрізок $\boldsymbol{[a_1,b_1]}$ на два рівних відрізки і знову виберемо той із них, у якому міститься нескінченна множина елементів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо його $[a_2,b_2]$. Продовжуючи цей процес, дістанемо послідовність укладених відрізків

$$\left[a,b\right]\supset\left[a_1,b_1\right]\supset\left[a_2,b_2\right]\supset\ldots\supset\left[a_n,b_n\right]\supset\ldots,$$

у яких довжина n-го відрізка $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ прямує до нуля при $n\to\infty$. Отже, за теоремою про вкладені відрізки $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$.

Побудову підпослідовності $\left\{x_{n_k}\right\}$ послідовності $\left\{x_n\right\}$ виконаємо так: у значенні x_{n_1} виберемо довільний елемент із $\left\{x_n\right\}$, який належить відрізку $\left[\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1}\right]$, у значенні x_{n_2} – довільний елемент із $\left\{x_n\right\}$, котрий належить відрізку $\left[a_2,b_2\right]$ і т. д. Оскільки для вибраних таким чином елементів виконується нерівність $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, то за теоремою 2.7 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = C$.

8.7.1 Критерій Коші збіжності числової послідовності.

Означення границі числової послідовності не дає змоги встановлювати збіжність чи розбіжність числової послідовності, якщо не задано значення самої границі. Воно лише дає можливість перевіряти, чи є число a границею даної послідовності, чи ні. Отже, виникає необхідність у наявності критерію збіжності числової послідовності, у якому б саме значення границі було відсутнє, тобто щоб цей критерій виявив "внутрішню" структуру збіжної послідовності. Такий критерій був установлений чеським математиком Больцано і французьким математиком Коші. Нині він має назву критерію Коші.

Теорема. Для того, щоб числова послідовність $\left\{x_n\right\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував номер N такий, що нерівність

$$\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon \tag{7}$$

виконувалася б для всіх m,n, які одночасно задовольняють умову $m > N, n > N$.

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. За означенням границі існує такий номер N, що

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

для всіх $\boldsymbol{n > N}$. Зрозуміло, що коли $\boldsymbol{m > N}$, то для всіх таких m нерівність (8) виконується. Отже, нехай $m > N, n > N$. Тоді

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \le |x_m - a| + |a - x_n| =$$
$$= |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер N, такий, що $|x_m - x_n| < \varepsilon$ для всіх n, m, які одночасно задовольняють умову $m > N, n > N$. Доведемо, що при цьому послідовність $\{x_n\}$ збіжна. Нехай заданому $\varepsilon > 0$ відповідає номер N, для якого виконується нерівність (7) для всіх $m > N, n > N$. Зафіксуємо одне із значень $\boldsymbol{n > N}$. Тоді за умовою (7) виконуються нерівності

$$\boldsymbol{|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon, |x_{n+2} - x_n| < \varepsilon, ..., |x_{n+e} - x_n| < \varepsilon, ...,}$$

тобто всі члени послідовності, починаючи з $\boldsymbol{x_{n+1}}$, знаходяться в $\boldsymbol{\varepsilon -}$околі фіксованої точки $\boldsymbol{x_n}$. Звідси випливає, що послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Отже, згідно з теоремою Больцано-Вейєрштрасса, із неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = C$. Тоді C є також границею послідовності $\{x_n\}$. Дійсно, $\boldsymbol{k}$ можна вибрати настільки великим, щоб одночасно виконувались нерівності $\left|x_{n_k}-C\right|<\varepsilon, n_k>N$. Тоді, поклавши $m=n_k$, матимемо $\left|x_m-C\right|<\varepsilon$ і $\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon$. Звідси одержуємо

$$\left|x_n-C\right|=\left|\left(x_n-x_m\right)+\left(x_m-C\right)\right|\leq\left|x_n-x_m\right|+\left|x_m-C\right|<\varepsilon+\varepsilon<2\cdot\varepsilon$$

для всіх $n>N$. А це означає, що $\lim\limits_{k\to\infty}x_n=C$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною або послідовністю Коші, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує номер N такий, що для всіх m,n, котрі одночасно задовольняють умову $m>N, n>N$, виконується нерівність $\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon$.

Теорема про границі функцій

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має границю в точці x_0, то ця границя єдина.

8.8 Поняття рівномірної неперервності функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку X. Виберемо довільну точку $x_0\in X$. Тоді за означенням неперервності функції в точці x_0 для довільного числа $\varepsilon<0$ знайдеться число $\delta>0$ таке, що нерівність $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ виконуватиметься для всіх x, що задовольняють умову $\left|x-x_0\right|<\delta$.

Зрозуміло, що число δ залежить як від числа ε, так і від x_0 (див. рис. 10).

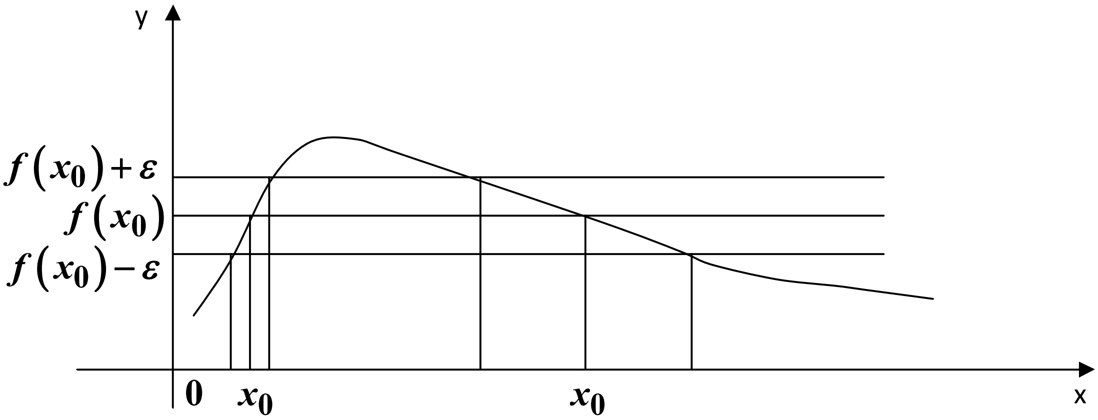


Рис. 10

Виникає питання, чи існують неперервні функції, визначені на певних проміжках, такі, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знаходилося б $\delta > 0$, незалежне від x_0, тобто, щоб δ було єдиним для довільного значення x_0 із проміжку визначення функції $f\left(x\right)$ (залежне лише від ε) і таким, що нерівність $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$ виконувалася б за умови $\left|x-x_0\right|<\delta$.

Розв'язання цього питання приводить до поняття рівномірної неперервності функції.

Означення. Функція $f\left(x\right)$ називається **рівномірно неперервною** на проміжку X, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для довільних точок $x, x_0 \in X$, які задовольняють умову $\left|x-x_0\right|<\delta$, виконується нерівність $\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$.

8.9 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від ірраціональної функції не завжди обчислюється в скінченному вигляді. Проте деякі типи таких інтегралів за допомогою певних підстановок можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Позначимо $R(u_1, u_2, ..., u_n)$ раціональну функцію від змінних $u_1, u_2, ..., u_n$. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{\sqrt{x-2} + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{3x+5}}$ є раціональною від $x, \quad \sqrt{x-2}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[4]{3x+5}$, тобто

$$f(x) = R\left(x, \quad \sqrt{x-2}, \quad \sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[4]{3x+5}\right).$$

Інтеграли виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}} \right) dx$,

де $m_i, n_i > 1, \quad i = 1, 2, ..., p$ – натуральні числа, a, b, c, d – дійсні числа, причому $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (у іншому випадку $\frac{ax+b}{cx+d}$ – стала величина) обчислюється за допомогою введення нової змінної

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, ..., p$.

Приклад 1. Обчислити $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$.

Розв’язування. Зробимо підстановку $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Одержимо

$$t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad 1-x = \frac{2}{t^2+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Далі маємо

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} = 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2arctg\, t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2arctg\, \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Приклад 2. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

Розв’язування.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 + \left(\sqrt[6]{x}\right)^2} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[6]{x},\, x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = \int \frac{6t^3 dt}{t+1} =$$

$$= 6\left(\int \left(t^2 + t + 1\right) dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - ln\left| t + 1 \right| \right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C .$$

Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок Ейлера.

Якщо $a > 0$, то вводиться нова змінна t :

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + t ,$$

де знаки можна брати у будь-якій послідовності.

Якщо у тричлені $ax^2 + bx + c$ $a < 0,$ $c > 0$, то можна використати іншу підстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} .$$

У випадку коли $a < 0$ і тричлен має дійсні різні корені α й β, то використовується підстановка

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$

або

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\beta)t\,.$$

Зазначимо, що підстановки Ейлера часто приводять до досить складних раціональних функцій, а тому на практиці при обчисленні інтегралів цього типу користуються простішими методами.

.....

5. Завдання для практиних занять з математичного аналізу

5.1. Завдання для практиних занять по темі границя числової послідовності

1. Опишіть геометричний зміст числа $|x-y|$.
2. Скільки ірраціональних чисел належать множині $A=\{x:|x+2|\le\sqrt{3}\}$?
3. Вкажіть два ірраціональних числа, добуток яких є раціональним числом.
4. Розв’яжіть нерівність $1<(x-1)^2<4$.
5. Зясуйте, чи існує найменше раціональне число, яке є більшим за $0,2$.
6. Доведіть нерівність $|1-3x|\le|2x-1|+|x|$.
7. Знайдіть точну верхню і точну нижню межі множини периметрів всіх правильних 2^{n+1}-кутників, $n\in\mathbb{N}$, описаних навколо круга радіуса R.
8. З’ясуйте, чи множина $H=\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k : n\in\mathbb{N}\right\}$ є обмеженою. Знайдіть $\sup H$ та $\inf H$ і з’ясуйте, чи $\max H=\sup H$ і $\inf H=\min H$.
9. З’ясуйте, чи обмеженою в $\mathbb{R}$ є множина $A=\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin k}{3^k} : n\in\mathbb{N}\right\}$.
10. Знайдіть $\min A$, $\inf A$, $\max A$ і $\sup A$, якщо $A=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

11. Знайдіть $\min A$, $\inf A$, $\max A$ і $\sup A$, якщо $A = \{x \in \Box : |x-2| < 1\} \cap \Box$.
12. Наведіть приклад відкритої множини $E \in \Box$, яка має найменший елемент.
13. Вкажіть множину, звуження на яку функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$ є оборотною функцією.
14. Доведіть, що множини $H_1 = (0;+\infty)$ і $H_2 = (-\infty;+\infty)$ є еквівалентними.
15. Множина всіх раціональних чисел є зліченною. Доведіть це твердження.
16. Наведіть приклад незліченної множини, яка міститься у проміжку $\left(1;\frac{7}{3}\right)$.
17. Сформулюйте означення границі послідовності.
18. Наведіть приклад обмеженої розбіжної послідовності.
19. Наведіть приклад обмеженої послідовності, яка має три часткові границі.
20. Наведіть приклад розбіжних в $\Box$ послідовностей (x_n) і (y_n), для яких послідовність $(x_n + y_n)$ є збіжною.
21. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Доведіть це твердження.
22. Границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ існує . Доведіть це твердження.
23. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} =$ і обґрунтуйте її.
24. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} =$
25. Завершіть написання рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+3n}\right)^n = .$
26. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ і $(\exists n_0)(\forall n \ge n_0) : x_n < y_n$. Чи можна стверджувати, що: 1) $a < b$; 2) $a \le b$; 3) $a = b$?
27. В будь-якому ε-околі точки a міститься нескінченна кількість членів послідовності (x_n). Чи можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
28. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2} + x_{n-1})$.
29. Наведіть приклад послідовності (x_n), для якої $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^{\Box} \in \Box)(\forall n \ge n^{\Box}) : x_n < \varepsilon$.
30. Зовні деякого ε-окола точки 2 лежить один член послідовності (x_n). Чи є послідовність (x_n) : а) збіжною; б) обмеженою?
31. Наведіть приклад немонотонної послідовності (x_n), для якої $(\exists n \in \Box) : x_n < x_{n+1}$.
32. Наведіть приклад двох неспадних послідовностей, добуток яких є спадною послідовністю.

33. Якщо збіжною є послідовність (x_n), то збіжною є і послідовність $\left(|x_n|\right)$.Доведіть це твердження.
34. Відомо, що послідовність $\left(|x_n|\right)$ є збіжною і має границю a. Що можна сказати про збіжність послідовності (x_n)?
35. Сформулюйте і доведіть теорему про границю суми послідовностей.
36. Сформулюйте і доведіть теорему про існування границі монотонної послідовності.
37. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$. Доведіть це твердження.
38. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$. Доведіть це твердження.
39. Вкажіть ті члени послідовності (x_n), які належать ε-околу точки a, якщо $x_n=1-1/n$, $\varepsilon=1$ і $a=1$.
40. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2}}{1+3n^2}$.
41. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$.
42. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}2^{k-1}}{\sum\limits_{k=1}^{n}3^{k-1}}$.
43. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{2+4n^2}$.
44. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+1}{4^n}\right)^n$.
45. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n+5}$.
46. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\cos n}{n^2+1}+\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{3n+1}\right)$.
47. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{3^n-2^n}+\frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{6n^2+6n}\right)$.
48. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n\sin n!}{n^2+1}+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

49. З'ясуйте, чи послідовність $\left(\dfrac{(-1)^n 2^n+3}{2^n+1}\operatorname{arctg} n\right)$ є обмеженою.

50. З'ясуйте, чи послідовність $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos k}{5^k+k}\right)$ є обмеженою.

51. Відомо, що послідовність (x_n) задовольняє умову $(\forall\varepsilon>0)(\exists n^{\square}\in\mathbb{N})(\forall n\geq n^{\square})(\forall m\geq n^{\square}):\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon$. Що можна сказати про збіжність послідовності (x_n)?

52. Послідовність $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos k}{2^k}\right)$ є збіжною в $\mathbb{R}$. Доведіть це твердження.

53. Знайдіть всі часткові границі послідовності $x_n=\sin\dfrac{\pi n}{4}+1$.

5.2.1 Завдання для практиних занять по темі границя функції

54. Вкажіть множину (область) визначення і множину значень функції $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

55. Зобразіть графік функції $y=-\left|x-2\right|$.

56. Зобразіть графік функції $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

57. Якщо $f(x)=\arcsin x$, то $f([2;3])=\varnothing$, $f([0;2])=[0;\pi/2]$, $f^{-1}([3;4])=\varnothing$ і $f^{-1}([\pi/6;\pi])=[1/2;1]$. Вкажіть правильні твердження.

58. Будь-яке раціональне число є періодом функції Діріхлє
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\notin Q.\end{cases}$$

59. Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x)=\begin{cases}2x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$

60. Доведіть, що $f'(-x)=-f'(x)$, якщо $f(-x)=f(x)$ і функція f є диференційованою на $\mathbb{R}$.

61. Завершіть написання рівності $(u+v)'=$ і обґрунтуйте її.

62. Завершіть написання рівності $(x^{\mu})'=$ і обґрунтуйте її.

63. Завершіть написання формули $(e^x)'=$ і доведіть її.

64. Завершіть написання рівності $(\operatorname{arctg} x)'=$ і обґрунтуйте її.

65. Завершіть написання рівності $(\arcsin x)'=$ і обґрунтуйте її.

66. Опишіть взаємозв’язок між існуванням похідної і диференційовністю функції.
67. Знайдіть $d^2 f(x_0)$, якщо $f(x) = xe^x$, $x_0 = 1$, $dx = 0{,}1$.
68. Сформулюйте і доведіть теорему Лагранжа.
69. Запишіть формулу Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа в точці $a = 0$ для функції $f(x) = e^x$ і обґрунтуйте її.
70. Подайте функцію $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ у вигляді
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + r_m(x),$$
якщо $a = 2$, $m = 3$.
71. Доведіть, що для всіх $x \in [-1;1]$ абсолютна похибка Δ наближеної формули $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ не перевищує $0{,}1$.
72. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.
73. $x + x^2 = o\left(x^3\right)$, $x \to \infty$. Чи справедливим є це твердження?
74. $x + \dfrac{1}{x} = o\left(x^3\right)$, $x \to 0$. Чи справедливим є це твердження?
75. $x + \dfrac{1}{x} = O\left(x^3\right)$, $x \to \infty$. Чи справедливим є це твердження?
76. $e^{\sqrt{x}} \sim e^{\sqrt{x+1}}$, $x \to +\infty$. Чи справедливим є це твердження?
77. $\dfrac{2+e^x}{1+e^x} = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Чи справедливим є це твердження?
78. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x} = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$. Чи справедливим є це твердження?
79. $x^3 = o\left(e^x\right)$, $x \to +\infty$. Чи справедливим є це твердження?
80. З’ясуйте, чи $f(2x) \sim f(x)$, якщо $x \to +\infty$ і $f(x) = \ln x$.
81. З’ясуйте, чи $f(x) = o(f(2x))$, якщо $x \to +\infty$ і $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
82. Знайдіть такі числа c_0 і c_1, що $e^{x\sin x} = c_0 + c_1 x + o(x)$, $x \to 0$.
83. Доведіть, що $(\forall c_1 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta): f(x) \ge c_1 \varphi(x)$, якщо $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = x^2$.

5.2.2 Завдання для практиних занять по темі дослідження функцій

84. Сформулюйте означення точки мінімуму функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

85. Сформулюйте і обґрунтуйте необхідні умови екстремуму функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
86. Чи правильне твердження: якщо функція f – зростаюча на відкритому проміжку $(a;b)$, то $f'(x)>0$ для всіх $x\in(a;b)$?
87. Знайдіть проміжки, звуження на які функції $f(x)=x^3-4x$ є оборотною функцією.
88. Знайдіть проміжки монотонності функції $f(x)=2-3x+x^3$.
89. Знайдіть екстремуми функцій $f(x)=6x-x^3$.
90. Доведіть нерівність $e^x\geq 1+x$, якщо $x\geq 0$.
91. Доведіть нерівність $\sin x\geq \dfrac{2}{\pi}x$, якщо $0\leq x\leq \pi/2$.
92. Доведіть нерівність $(1+t)^\alpha\leq 1+t^\alpha$, $\alpha\in[0;1]$, $t\geq 0$.
93. Доведіть нерівність $\operatorname{arctg} x\leq \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{1+x}$, $x>0$.
94. Знайдіть проміжки опуклості і точки перегину функції $f(x)=e^{-x}+x^2$.
95. Знайдіть асимптоти функції $f(x)=\dfrac{x^4}{4(x-2)}$.
96. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-2}$, . на проміжку $[-1;1]$.
97. Зобразіть схематично графік функції f, якщо $f(x)>0$, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, для всіх $x\in\mathbb{R}$.
98. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x)=3x^4+4x^3+1$ на відрізку $[-2;1]$.
99. Знайдіть екстремуми функції $y(x)=3x^2-4x^3$.
100. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y(x)=-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ на проміжку $[-1;1]$.
101. Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку $y(x)=x^4-2x^2+3$ на проміжку $[1;3]$.
102. Знайдіть найбільше значення функції $y(x)=2x^3-15x^2+36x$ на проміжку $[0;2]$.
103. Скільки точок екстремуму має функція $y(x)=(x^2-4)^3$?
104. Скільки точок екстремуму має функція $y(x)=(x^3+x)^3$?
105. Скільки точок екстремуму має функція $y(x)=3x^4-4x^3+5$?
106. Знайдіть абсцису точки параболи $y=-x^2+8x-3$, у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює -6.

107. Знайдіть ординату точки параболи $y = x^2 + 4x - 7,$ у якій кутовий коефіцієнт дотичної до кривої дорівнює 6.

108. Рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд $y = 8x - 19$. Знайдіть абсцису точки дотику.

109. Рівняння дотичної до кривої $y = -x^2 + 5x + 4$ має вигляд $y = 3x + 5$. Знайдіть ординату точки дотику.

110. Скільки критичних точок має функція $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$?

111. Знайдіть найменшу критичну точку функції $y = \sqrt[3]{x^2 + 9x - 10.}$

112. Знайдіть найбільше значення $f(x) = 2^{-x^2}$ на відрізку $[0;2]$.

113. Знайдіть найбільше значення функції $y = |x^2 - 3x|$ на проміжку $[0;3]$.

114. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = \dfrac{(3x-5)(-25-x)}{(x+5)^2}$.

115. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = \dfrac{(3x-11)(-7-x)}{(x-1)^2}$.

116. Знайдіть найменше ціле значення a, при якому функція $y = x^3 + ax^2 + x + 1$ зростає на всій числовій осі.

117. Знайдіть найменше ціле значення a, при якому функція $y = e^{ax} + ax$ зростає на всій числовій осі.

118. Знайдіть суму параметрів a і b, при яких параболи $y = x^2 - 4x - a$ і $y = -x^2 + 2x + b$ мають спільну дотичну, паралельну осі абсцис.

119. Знайдіть абсцису точки перетину осі OX з дотичною до графіка функції $y = 0{,}5x^2 + 1,$ якщо дотична проходить через точку $M(-1;-3)$ і має додатний кутовий коефіцієнт.

5.2.3 Завдання для практиних занять по темі невизначений інтеграл

120. Сформулюйте означення первісної і невизначеного інтеграла.

121. Знайдіть $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

122. Знайдіть $\int \dfrac{x}{1+x^2}dx$.

123. Знайдіть $\int \dfrac{dx}{x^2+3x+3}$.

124. Знайдіть $\int \dfrac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

125. Знайдіть $\int \dfrac{dx}{x^2+4x+3}$.

126. Знайдіть $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

127. Знайдіть $\int x\sin x dx$.

128. Знайдіть $\int x\ln x dx$.

129. Знайдіть $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

130. Знайдіть $\int xe^{\sqrt{x}}dx$.

131. Знайдіть $\int \cos^2 x dx$.

132. Знайдіть $\int \sin^3 x dx$.

133. Знайдіть $\int \mathrm{ctg}^2 2x dx$.

134. Доведіть $\int xf'(x)dx = xf(x) - F(x) + C$, якщо функція f має похідну і первісну F на проміжку Δ, що розглядається.

135. Виходячи з означення первісної і невизначеного інтегралу, покажіть, що $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $x \in (-a;a)$, $a > 0$.

136. Сформулюйте означення визначеного інтеграла (інтеграла Рімана).

137. Якщо функція $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$, то вона є обмеженою на $[a;b]$. Доведіть це твердження.

138. Якщо $a \le b$, функція $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$ і $f(x) \ge 0$ для всіх $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Доведіть це твердження.

Контрольні завдання по темі ліміти

Знайти ліміти:

$$\lim_{x\to 0}\left(0.5x^{-0.5}y^{0.5}\right) = \infty$$

$$\lim_{y\to 0}\left(0.5x^{0.5}y^{-0.5}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(-0.25x^{-1.5}y^{0.5}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to \infty}\left(-0.25x^{0.5}y^{-1.5}\right) = 0$$

Контрольні завдання по темі часткова похідна

Часткові похідні першого порядку:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0.5x^{-0.5}y^{0.5} \geq 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0.5x^{0.5}y^{-0.5} \geq 0$$

Часткові похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -0.25x^{-1.5}y^{0.5} \leq 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -0.25x^{0.5}y^{-1.5} \leq 0$$

Математичний аналіз, поверхневі інтеграли. Завдання для МКР.

Варіант 1.

1. Що таке розбиття прямокутника в двовимірному просторі Евкліда? Дати означення нижньої та верхньої сум Дарбу.
2. Сформулювати теорему та вивести формулу Ґауса-Остроградського.

3. Практичні завдання.

(i) Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_Q \left(\sqrt{x} + 6y^2\right) dxdy, \ Q = [0;4] \times [0;1].$$

(ii) Знайти всі частинні похідні другого порядку функції

$$f(x, y) = x \ln y \, .$$

Варіант 2.

1 Дати означення подвійного інтеграла по прямокутнику. Сформулювати та довести теорему про інтегрованість неперервної функції по прямокутнику.
2 Записати формулу Ґауса-Остроградського. Дати означення дивергенції. Сформулювати фізичну інтерпретацію формули Ґауса-Остроградського та записати її у векторній формі.

3 Практичні завдання.
(i) Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{Q} 2xe^{xy}\,dxdy, \;\; Q = [0;1] \times [1;2].$$

(ii) Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду

$\int\limits_{L} \sin(y+1)dL,$ де L – відрізок AB, $A(0;\,0)$, $B(3;\,1)$.

Варіант 3.

1 Сформулювати та довести теорему, яка зводить обчислення подвійного інтеграла по прямокутнику до двох інтегралів Рімана.
2 Побудувати інтеграл Лебеґа для простих функцій. Сформулювати теорему про обчислення інтеграла Лебеґа для „функції-драбини”.

3 Практичні завдання.
(i) Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_{Q} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz,$$

де $Q = \left[0;a\right] \times \left[0;b\right] \times \left[0;c\right], a > 0, b > 0, c > 0.$

(ii) Знайти похідну функції $f(x, y) = x^2 - y^2$ в точці M(1; –1) за напрямом вектора $\vec{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Варіант № 4

4 Дати означення нижнього і верхнього інтегралів по паралелепіпеді та потрійного інтеграла по паралелепіпеді в тривимірному просторі Евкліда.

5 Записати формулу Ґріна. Сформулювати теорему, яка вказує умови, коли значення криволінійного інтегралу другого роду дорівнює нулю і значення криволінійного інтегралу не залежить від шляху інтегрування.

6 Практичні завдання.

(i) Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_Q \left(\frac{1}{x} + 8y^3 \right) dxdy, \; Q = [1;2] \times [0;1].$$

(ii) Обчислити диференціал другого порядку функції

$$f(x, y) = x^2 y^3 + \sin(xy).$$

4.3 Контрольна робота з курсу вищої математики №1

4.3.1 Зразок розв`язання і оформлення контрольної роботи №1

Зразок розв'язання варіанту

Завдання 4.1.31 Дослідити на сумісність і розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методом Гаусса, Крамера та матричним

$$\begin{cases} x-5y+2z=-2; \\ 2x-10y-z=-9; \\ 8x-2y-3z=3. \end{cases}$$

Розв'язання. Дослідимо систему рівнянь на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. Запишемо розширену матрицю A^* системи:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -10 & -1 & -9 \\ 8 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення матриці A^*, а саме: помножимо елементи першого рядка на (-2) і додамо до другого; помножимо елементи першого рядка на (-8) і додамо до третього рядка. Отримаємо

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -10 & -1 & -9 \\ 8 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 38 & -19 & 19 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(A^*)=3$ і кількість невідомих $n=3$, то система сумісна і має єдиний розв'язок.

Відповідно до останньої матриці, система набула трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x-5y+2z=-2; \\ 38y-19z=19; \\ -5z=-5, \end{cases} \begin{cases} x-5y+2z=-2; \\ 38y-19z=19; \\ z=1, \end{cases} \begin{cases} x-5y+2z=-2; \\ 38y=38; \\ z=1, \end{cases} \begin{cases} x=1; \\ y=1; \\ z=1. \end{cases}$$

Отже, розв'язком системи є: $x=1,\ y=1,\ z=1.$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера.

Знайдемо визначник системи рівнянь Δ та визначники Δx, Δy, Δz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -10 & -1 \\ 8 & -2 & -3 \end{vmatrix}=190, \qquad \Delta x=\begin{vmatrix} -2 & -5 & 2 \\ -9 & -10 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}=190,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -9 & -1 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix}=190, \qquad \Delta z=\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & -10 & -9 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}=190.$$

Оскільки $\Delta=190\neq 0$, то система рівнянь має єдиний розв'язок, який знайдемо за формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{190}{190}=1,\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{190}{190}=1,\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{190}{190}=1.$$

Отже, розв'язком системи є: $x=1,\ y=1,\ z=1.$ Дійсно, підставивши отриманий розв'язок в задану систему рівнянь, отримаємо тотожності.

Розв’яжемо систему рівнянь матричним методом.

Запишемо матриці A, B та X системи у вигляді:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\ 2 & -10 & -1\\ 8 & -2 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-2\\ -9\\ 3\end{pmatrix};X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Систему лінійних рівнянь можна записати матричним рівнянням $A\cdot X=B$, розв’язок якого задається формулою $X=A^{-1}\cdot B$.

Знайдемо матрицю, обернену до матриці A. Для цього спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2\\ 2 & -10 & -1\\ 8 & -2 & -3\end{vmatrix}=190.$$

Оскільки $\det A\neq 0,$ то обернена матриця існує. Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-10 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=30-2=28;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 8 & -3\end{vmatrix}=-(-6+8)=-2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -10\\ 8 & -2\end{vmatrix}=-4+80=76;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-(15+4)=-19;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 8 & -3\end{vmatrix}=-3-16=-19;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 8 & -2\end{vmatrix}=-(-2+40)=-38;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -10 & -1\end{vmatrix}=5+20=25;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-(-1-4)=5;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & -10\end{vmatrix}=-10+10=0.$$

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{190}\begin{pmatrix}28 & -19 & 25\\ -2 & -19 & 5\\ 76 & -38 & 0\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю X як добуток двох матриць A^{-1} і B:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{190}\begin{pmatrix}28 & -19 & 25\\ -2 & -19 & 5\\ 76 & -38 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ -9\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{190}\cdot\begin{pmatrix}-56+171+75\\ 4+171+15\\ -152+342+0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{190}\cdot\begin{pmatrix}190\\ 190\\ 190\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x=1,\ y=1,\ z=1.$

Завдання 4.2.31 Задані координати точок $A_1(4;\ -2;\ 3)$, $A_2(1;\ -3;\ 2)$, $A_3(3;\ 1;\ 5)$, $S(4;\ 3;\ 1)$ - вершини піраміди $A_1A_2A_3S$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$, $\overrightarrow{SA_3}$ та їхні довжини;

б) кут при вершині S грані A_1SA_2;

в) площу основи $A_1A_2A_3$ піраміди $A_1A_2A_3S$;

г) об’єм піраміди $A_1A_2A_3S$ та довжину висоти SO, опущеної з вершини S на основу $A_1A_2A_3$.

Розв’язання.

а) Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$, $\overrightarrow{SA_3}$:

$\overrightarrow{SA_1}=(4-4;-2-3;3-1)=(0;-5;2)$,

$\overrightarrow{SA_2}=(1-4;-3-3;2-1)=(-3;-6;1)$,

$\overrightarrow{SA_3}=(3-4;1-3;5-1)=(-1;-2;4)$.

Знайдемо довжини векторів:

$$\left|\overrightarrow{SA_1}\right|=\sqrt{0^2+(-5)^2+2^2}=\sqrt{29},$$

$$\left|\overrightarrow{SA_2}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+1^2}=\sqrt{46},$$

$$\left|\overrightarrow{SA_3}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}.$$

б) Знайдемо $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\overrightarrow{SA_1}\cdot\overrightarrow{SA_2}}{\left|\overrightarrow{SA_1}\right|\left|\overrightarrow{SA_2}\right|}.$$

Знайдемо скалярний добуток векторів: $\overrightarrow{SA_1}\cdot\overrightarrow{SA_2}=32$.

Кут при вершині S грані A_1SA_2: $\cos\varphi=\dfrac{32}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{46}}=\sqrt{\dfrac{16}{29}}.$

в) Якщо відомі координати вершин трикутника $A_1A_2A_3$, то його площу можна знайти за формулою

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

$\overrightarrow{A_1A_2}=(-3;-1;-1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-1;3;2)$,

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}\left|1\cdot\vec{i}+7\cdot\vec{j}-10\cdot\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+7^2+(-10)^2}=\frac{\sqrt{150}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Отже, площа основи $A_1A_2A_3$ піраміди $A_1A_2A_3S$ дорівнює $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

г) Знайдемо об'єм піраміди $A_1A_2A_3S$:

$$V_{A_1A_2A_3S}=\frac{1}{6}V_{\text{пар}}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{SA_1}\,\overrightarrow{SA_2}\,\overrightarrow{SA_3}\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}0 & -5 & 2\\ -3 & -6 & 1\\ -1 & -2 & 4\end{vmatrix}|=\frac{31}{6}.$$

З формули об'єму піраміди $V_{A_1A_2A_3S}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H$ виразимо

$$H=\frac{3V_{A_1A_2A_3S}}{S_{\Delta A_1A_2A_3}},\quad H=\frac{\frac{31}{6}\cdot 3}{\frac{5\sqrt{6}}{2}}=\frac{31\sqrt{6}}{30}.$$

Завдання 4.3.31 Довести, що вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом, якщо:

$\vec{a}=(1;\ -3;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -5;\ 2)$, $\vec{c}=(1;\ -4;\ 1)$, $\vec{d}=(0;\ 0;\ 4)$. *Розв'язання.* Дослідимо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ на компланарність або лінійну залежність, знайшовши їх мішаний добуток:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Оскільки мішаний добуток векторів не дорівнює нулю, то вектори некомпланарні, тобто лінійно незалежні і тому утворюють базис.

Вектор $\vec{d}$ можна розкласти за базисом векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Лінійна комбінація матиме вигляд: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Запишемо систему рівнянь для знаходження $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, прирівнявши відповідні координати:

$$\begin{cases}\alpha\cdot 1+\beta\cdot 1+\gamma\cdot 1=0;\\ \alpha\cdot(-3)+\beta\cdot(-5)+\gamma\cdot(-4)=0;\\ \alpha\cdot 1+\beta\cdot 2+\gamma\cdot 1=4.\end{cases}$$

Розв’яжемо дану систему за допомогою формул Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5-4-6+5+8+3=1;$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16+20=4;$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12+16=4;$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -20+12=-8.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4;\ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{4}{1} = 4;\ \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{-8}{1} = -8.$$

Таким чином, маємо розклад вектора $\vec{d}$ за базисом векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d} = 4\vec{a} + 4\vec{b} - 8\vec{c}$.

Завдання 4.4.31 Обчислити границі, не користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 7x - 6}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 7x + 1}{x^3 - 5x + 4}$.

Розв’язання:

а) розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, а потім скоротимо дріб на $x+2$: $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 7x - 6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(x+2)(x+1)(x-3)} =$
$= \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} = \frac{-3\cdot(-4)}{-1\cdot(-5)} = \frac{12}{5};$

б) помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз $\sqrt{21+x}+5$, а потім скоротимо дріб на $x-4$:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{21+x} - 5\right)\left(\sqrt{21+x} + 5\right)}{\left(x^3 - 64\right)\left(\sqrt{21+x} + 5\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{21 + x - 25}{\left(x^3 - 64\right)\left(\sqrt{21+x} + 5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(x^2 + 4x + 16\right)\left(\sqrt{21+x} + 5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\left(x^2 + 4x + 16\right)\left(\sqrt{21+x} + 5\right)} = \frac{1}{480};$$

в) користуючись таблицею еквівалентних нескінченно малих величин, замінимо нескінченно малі величини в чисельнику і знаменнику еквівалентними: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}2=2$;

г) скористаємось другою важливою границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-x-1}{3-x}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3-x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{(x-3)\frac{x+2}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-3}}=e;$$

д) поділимо чисельник і знаменник дробу на x в найбільшому степені, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7x+1}{x^3-5x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5/x+7/x^2+1/x^3}{1-5/x^2+4/x^3}=0.$$

Завдання 4.5.31 Знайти похідні функцій:

а) $y=\ln^3\sin\left(e^{-5x}+2\right)$; б) $y=(\sin x)^{\ln 2x}$; в); $\begin{cases}x=\log_3(t+2);\\ y=2^t+4t.\end{cases}$ г) $tg(xy)+y=2\cos x$.

Розв’язання:

а) скористаємось правилом диференціювання складеної функції:

$$y'=\frac{3\ln^2\sin(e^{-5x}+2)\cdot\cos(e^{-5x}+2)\cdot e^{-5x}\cdot(-5)}{\sin(e^{-5x}+2)}=$$
$$=-15\ln^2\sin(e^{-5x}+2)\cdot ctg(e^{-5x}+2)\cdot e^{-5x};$$

б) прологарифмуємо обидві частини рівності, а потім продиференціюємо отриману рівність, використовуючи правило диференціювання складеної функції: $\ln y=\ln 2x\cdot\ln(\sin x)$, $\dfrac{y'}{y}=(\ln 2x)'\cdot\ln(\sin x)+\ln 2x\cdot(\ln(\sin x))'=\dfrac{1}{x}\ln(\sin x)+\ln 2x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

звідси:

$$y'=(\sin x)^{\ln 2x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(\sin x)+\ln 2x\cdot ctgx\right);$$

в) Знайдемо похідну y'_x: $y'_x=\dfrac{\left(2^t+4t\right)'}{\left(\log_3(t+2)\right)'}=(2^t\ln 2+4)(t+2)\ln 3$.

г) продиференціюємо обидві частини рівності по x, вважаючи y функцією від x: $\frac{1}{\cos^2(xy)}\cdot(xy)'+y'=-2\sin x$; $\frac{1}{\cos^2(xy)}\cdot(y+xy')+y'=-2\sin x$;

$y'\left(\frac{x}{\cos^2(xy)}+1\right)=-2\sin x-\frac{y}{\cos^2(xy)}$; $y'=-\frac{2\sin x\cdot\cos^2(xy)+y}{x+\cos^2(xy)}$.

Завдання 4.6.31 Дослідити функції та побудувати їх графіки:

а) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання: а) Область визначення даної функції $D=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$. В точці $x=0$ функція має розрив. Знайдемо односторонні границі функції:

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to 0+0}f(x)=+\infty,$$

отже, $x=0$ — точка розриву другого роду.

Пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою кривої.

Функція ні парна, ні непарна, неперіодична.

Знайдемо екстремуми та інтервали монотонності функції:

$$y'=\frac{-3x^2\cdot x^2-(1-x^3)\cdot 2x}{x^4}=-\frac{x^3+2}{x^3},$$

$y'=0$ в точці $x=-\sqrt[3]{2}$, яка є критичною,

y' не існує в точці $x=0$, але це не критична точка, тому що вона є точкою розриву .

$y'>0$ — функція зростає при $x\in(-\sqrt[3]{2};\,0),$

$y'<0$ — функція спадає при $x\in(-\infty;\,-\sqrt[3]{2})\cup(0;\,+\infty)$. Отже, $x=-\sqrt[3]{2}$ — точка мінімуму: $y_{\min}=y(-\sqrt[3]{2})=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Знайдемо інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину:

$y''=-\frac{3x^2\cdot x^3-3x^2(x^3+2)}{x^6}=\frac{6}{x^4}$; $y''\neq 0$, y'' не існує при $x=0$, але ця точка не може бути точкою перегину, тому що є точкою розриву.

Отже, графік функції не має точок перегину, причому $y''>0$ на всій області визначення, тому графік функції всюди вгнутий.

Знайдемо асимптоти:

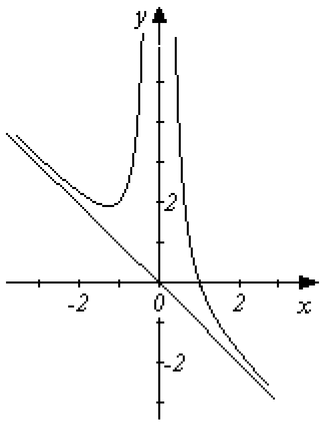
$x=0$ — вертикальна асимптота;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{x^3}=-1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^3}{x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

отже, пряма $y=-x$ — похила асимптота.

Графік функції перетинає вісь *Ox* в точці (1;0) і не перетинає вісь *Oy*.

За результатами досліджень будуємо графік функції:



б) Область визначення даної функції $D=(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$. В точці $x=0$ функція має розрив. Використовуючи правило Лопіталя, знайдемо односторонні границі функції:

$$\lim_{x\to0-0}x^2e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0-0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0-0}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0-0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0-0}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0-0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0;$$

аналогічно $\lim_{x\to0+0}x^2e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}=e^{\infty}=\infty$,

отже, $x=0$ — точка розриву другого роду.

Пряма $x=0$ є вертикальною асимптотою кривої.

Функція ні парна, ні непарна, неперіодична.

Знайдемо екстремуми та інтервали монотонності функції:

$y'=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$,

$y'=0$ в точці $x=\frac{1}{2}$, яка є критичною,

y' не існує в точці $x=0$, але це не критична точка, тому що вона є точкою розриву .

$y'>0$ — функція зростає при $x\in(\frac{1}{2};+\infty)$,

$y'<0$ — функція спадає при $x\in(-\infty;\,0)\cup\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$. Отже, $x=\frac{1}{2}$ — точка мінімуму: $y_{\min}=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$.

Знайдемо інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину:

$y''=\frac{2x^2-2x+1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, $y''\neq 0$, y'' існує на всій області визначення функції. Отже, графік функції не має точок перегину, причому $y''>0$ на всій області визначення, тому графік функції всюди вгнутий.

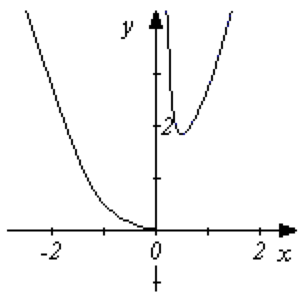
Знайдемо асимптоти: $x=0$ — вертикальна асимптота;

$k=\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x}}=\infty$, отже, похилих асимптот немає.

Графік функції не перетинається з осями координат. Початок координат є граничною точкою лівої вітки графіка.

Знайдемо декілька допоміжних точок: $\left(-2;\frac{4}{\sqrt{e}}\right);(1;e);\left(-1;\frac{1}{e}\right)$.

За результатами досліджень будуємо графік функції:



Завдання 3.2.31. Знайти екстремум функції

$$z=2x^2-3xy+5y^2-3x+2y-1$$

Розв’язання. Знайдемо спочатку критичні точки, тобто точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, або не існують (саме в цих точках може міститися екстремум функції): $z'_x = 4x - 3y - 3$; $z'_y = -3x + 10y + 2$.

Розв’язуємо систему

$$\begin{cases} 4x - 3y - 3 = 0 \\ -3x + 10y + 2 = 0 \end{cases}\left|\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 31y - 1 = 0 \\ 31x - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y = 1/31 \\ x = 24/31 \end{matrix}$$

і отримуємо координати критичні точки

$$M_0\left(24/31; 1/31\right).$$

Далі перевіряємо за допомогою достатньої умови існування екстремуму чи буде в точці M_0 екстремум. З цією метою обчислюємо похідні другого порядку

$$A = z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(4x - 3y - 3\right)'_x = 4,$$

$$B = z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(4x - 3y - 3\right)'_y = -3,$$

$$B = z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(-3x + 10y + 2\right)'_x = -3,$$

$$C = z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-3x + 10y + 2\right)'_y = 10.$$

Складаємо визначник другого порядку з цих похідних в точці M_0. В нашому випадку частинні похідні другого порядку виявляються сталими величинами і тому

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 9 = 31 > 0.$$

Таким чином, в критичній точці $M_0\left(\frac{24}{31}, \frac{1}{31}\right)$ функція z має мінімум, тому що $z''_{xx}\big|_{M_0} = 4 > 0.$

Обчислимо мінімальне значення функції

$$z_{\min} = 2\left(\frac{24}{31}\right)^2 - 3 \cdot \frac{24}{31} \cdot \frac{1}{31} + 5\left(\frac{1}{31}\right)^2 - 3 \cdot \frac{24}{31} + 2 \cdot \frac{1}{31} - 1 = -\frac{2046}{961} = -2\frac{4}{31}.$$

6. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1

Завдання 6.1. Дослідити на сумісність і розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методом Гаусса, Крамера та матричним.

6.1.1 $\begin{cases} 2x-y+4z=6, \\ -x+5y-6z=7, \\ 4x+2y-z=10. \end{cases}$ **6.1.2** $\begin{cases} x+y-2z=-7, \\ 2x-2y+z=9, \\ x+2y-z=-6. \end{cases}$

6.1.3 $\begin{cases} x+2y+2z=4, \\ 3x-y-3z=14, \\ 2x+y+z=8. \end{cases}$ **6.1.4** $\begin{cases} 5x-3y+z=2, \\ 2x-y+z=3, \\ x+3y+2z=13. \end{cases}$

6.1.5 $\begin{cases} 3x-2y+z=7, \\ x-2y-3z=-1, \\ 4x-3y-5z=3. \end{cases}$ **6.1.6** $\begin{cases} x+5y-2z=13, \\ x-2y+3z=-4, \\ 3x-4y+z=6. \end{cases}$

6.1.7 $\begin{cases} 3x-2y+z=1, \\ 5x-4y+2z=0, \\ x+3y+2z=6. \end{cases}$ **6.1.8** $\begin{cases} x+2y+2z=13, \\ 3x-y-z=4, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$

6.1.9 $\begin{cases} 4x-y+5z=4, \\ 2x-y+3z=2, \\ x+y-2z=3. \end{cases}$ **6.1.10** $\begin{cases} 3x-y+z=-3, \\ x-2y-4z=1, \\ 2x+y-3z=12. \end{cases}$

6.1.11 $\begin{cases} 3x+y+2z=1, \\ 2x+y-z=5, \\ x+y-2z=5. \end{cases}$ **6.1.12** $\begin{cases} 2x+y+3z=8, \\ x+2y-4z=-3, \\ 2x-y+3z=10. \end{cases}$

6.1.13 $\begin{cases} x+2y+2z=10, \\ 3x-y+z=4, \\ 4x-2y+5z=7. \end{cases}$ **6.1.14** $\begin{cases} 3x+2y-z=9, \\ x+2y-3z=-1, \\ x+y+5z=8. \end{cases}$

6.1.15 $\begin{cases} x+3y+2z=9, \\ 3x-2y+2z=-2, \\ 3x+2y+z=11. \end{cases}$ **6.1.16** $\begin{cases} 3x-4y-2z=9, \\ x+5y+2z=2, \\ 4x+3y-z=7. \end{cases}$

6.1.17 $\begin{cases} x+3y+2z=-8, \\ 5x+2y-2z=0, \\ x+y-z=-3. \end{cases}$ **6.1.18** $\begin{cases} 2x-y+3z=5, \\ 3x-2y-3z=14, \\ 2x-2y-z=7. \end{cases}$

6.1.19 $\begin{cases} 5x-3y+5z=2, \\ 2x+y+z=4, \\ x+2y-3z=7. \end{cases}$ **6.1.20** $\begin{cases} 1x-2y+4z=3, \\ 5x-y+3z=0, \\ 2x+2y-3z=-3. \end{cases}$

6.1.21 $\begin{cases} 3x+2y+z=1, \\ 2x+y-3z=-5, \\ x+y+2z=4. \end{cases}$ **6.1.22** $\begin{cases} 3x-y+2z=-10, \\ 4x+2y-z=-3, \\ x+3y+z=3. \end{cases}$

6.1.23 $\begin{cases} 2x-3y+2z=-3, \\ x+2y-z=4, \\ -x+5y-z=5. \end{cases}$ **6.1.24** $\begin{cases} x-y-z=4, \\ 3x+y-z=4, \\ 2x-3z=8. \end{cases}$

6.1.25 $\begin{cases} x+2y-z=-1, \\ 2x-2y+z=7, \\ x-4y+3z=9. \end{cases}$ **6.1.26** $\begin{cases} -2x-4y+2z=-6, \\ 3x+y-5z=4, \\ x-y+3z=0. \end{cases}$

6.1.27 $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=11, \\ -4x-y+3z=-6. \end{cases}$ **6.1.28** $\begin{cases} 4x-3y+2z=-5, \\ 2x+5y-3z=-7, \\ 5x+6y-2z=-4. \end{cases}$

6.1.29 $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ x-y+z=-1, \\ -x+2y-2z=3. \end{cases}$ **6.1.30** $\begin{cases} 7x-5y=13, \\ 4x+11y=49, \\ 2x+3y+4z=41. \end{cases}$

Завдання 1.2. Задані координати точок $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $A_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $S(4;\ 3;\ 1)$ - вершини піраміди $A_1A_2A_3S$.

Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA_1}$, $\overrightarrow{SA_2}$, $\overrightarrow{SA_3}$ та їхні довжини;

б) кут при вершині S грані $\grave{A}_1S\grave{A}_2$;

в) площу основи $A_1A_2A_3$ піраміди $A_1A_2A_3S$;

г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3S$ та довжину висоти SO, опущеної з вершини S на основу $A_1A_2A_3$.

1.2.1 $A_1(3;\ 1;\ -4)$, $A_2(1;\ -4;\ 5)$, $A_3(2;\ -1;\ 0)$.

1.2.2 $A_1(2;\ -3;\ 5)$, $A_2(3;\ 4;\ 1)$, $A_3(-1;\ 2;\ -6)$.

1.2.3 $A_1(-5;\ \ 1;\ \ 3),\ A_2(-2;\ \ 4;\ \ 5),\ A_3(7;\ \ 3;\ \ -4)$.

1.2.4 $A_1(-2;\ \ -5;\ \ 1),\ A_2(6;\ \ -1;\ \ 9),\ A_3(1;\ \ 3;\ \ 2)$.

1.2.5 $A_1(-9;\ \ 2;\ \ 1),\ A_2(-4;\ \ 5;\ \ -7),\ A_3(2;\ \ 1;\ \ 4)$.

1.2.6 $A_1(1;\ \ 6;\ \ 5),\ A_2(3;\ \ 2;\ \ 7),\ A_3(4;\ \ -1;\ \ 1)$.

1.2.7 $A_1(-8;\ \ 5;\ \ 3),\ A_2(-2;\ \ 1;\ \ 4),\ A_3(5;\ \ 2;\ \ 1)$.

1.2.8 $A_1(-7;\ \ -3;\ \ 2),\ A_2(8;\ \ 4;\ \ 1),\ A_3(6;\ \ 2;\ \ 8)$.

1.2.9 $A_1(3;\ \ -7;\ \ 4),\ A_2(1;\ \ -4;\ \ 2),\ A_3(-5;\ \ 1;\ \ 3)$.

1.2.10 $A_1(-2;\ \ 5;\ \ 7),\ A_2(-1;\ \ 4;\ \ 3),\ A_3(3;\ \ -1;\ \ 8)$.

1.2.11 $A_1(7;\ \ 3;\ \ -4),\ A_2(3;\ \ 4;\ \ 1),\ A_3(2;\ \ -1;\ \ 0)$.

1.2.12 $A_1(2;\ \ -1;\ \ 0),\ A_2(-5;\ \ 1;\ \ 3),\ A_3(-1;\ \ 2;\ \ -6)$.

1.2.13 $A_1(-5;\ \ 1;\ \ 3),\ A_2(-2;\ \ 4;\ \ 5),\ A_3(7;\ \ 3;\ \ -4)$.

1.2.14 $A_1(-1;\ \ -5;\ \ 1),\ A_2(7;\ \ -1;\ \ 8),\ A_3(-5;\ \ 1;\ \ 3)$.

1.2.15 $A_1(-7;\ \ 2;\ \ 6),\ A_2(-4;\ \ 5;\ \ 1),\ A_3(3;\ \ 7;\ \ -5)$.

1.2.16 $A_1(-7;\ \ -4;\ \ 5),\ A_2(3;\ \ 1;\ \ 9),\ A_3(4;\ \ -2;\ \ 1)$.

1.2.17 $A_1(-8;\ \ 1;\ \ 3),\ A_2(-2;\ \ -6;\ \ 4),\ A_3(-7;\ \ 2;\ \ 1)$.

1.2.18 $A_1(-4;\ \ -3;\ \ 2),\ A_2(2;\ \ -7;\ \ 1),\ A_3(6;\ \ 2;\ \ 8)$.

1.2.19 $A_1(-6;\ \ 4;\ \ 9),\ A_2(1;\ \ 3;\ \ 2),\ A_3(7;\ \ -1;\ \ 5)$.

1.2.20 $A_1(-7;\ \ 5;\ \ 4),\ A_2(-1;\ \ 8;\ \ 5),\ A_3(2;\ \ -1;\ \ 7)$.

1.2.21 $A_1(8;\ \ -1;\ \ -4),\ A_2(5;\ \ -3;\ \ 1),\ A_3(7;\ \ -2;\ \ 6)$.

1.2.22 $A_1(-2;\ \ -6;\ \ 4),\ A_2(-7;\ \ 2;\ \ -3),\ A_3(0;\ \ -4;\ \ 6)$.

1.2.23 $A_1(-6;\ \ 2;\ \ -3),\ A_2(1;\ \ 4;\ \ 3),\ A_3(7;\ \ -3;\ \ 4)$.

1.2.24 $A_1(-2;\ \ -6;\ \ -9),\ A_2(-4;\ \ -1;\ \ 2),\ A_3(7;\ \ 0;\ \ 3)$.

1.2.25 $A_1(-9;\ \ 1;\ \ -4),\ A_2(3;\ \ -7;\ \ 9),\ A_3(2;\ \ 5;\ \ -6)$.

1.2.26 $A_1(7;\ \ -4;\ \ -10),\ A_2(9;\ \ 2;\ \ -7),\ A_3(5;\ \ -6;\ \ 1)$.

1.2.27 $A_1(0;\ \ 1;\ \ -3),\ A_2(4;\ \ 7;\ \ -9),\ A_3(1;\ \ -5;\ \ 6)$.

1.2.28 $A_1(-3;\ \ 1;\ \ -2),\ A_2(-7;\ \ 3;\ \ -4),\ A_3(9;\ \ -2;\ \ 5)$.

1.2.29 $A_1(3;\ \ -7;\ \ 6),\ A_2(-1;\ \ 6;\ \ 9),\ A_3(8;\ \ 1;\ \ 7)$.

1.2.30 $A_1(9;\ \ -8;\ \ 5),\ A_2(3;\ \ 8;\ \ 7),\ A_3(-2;\ \ 1;\ \ 8)$.

Завдання 1.3. Довести, що вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом, якщо:

1.3.1 $\vec{a}=(1;4;-2),\ \vec{b}=(3;1;6),\ \vec{c}=(-1;2;0),\ \vec{d}=(4;3;5).$

1.3.2 $\vec{a}=(5;0;-2),\ \vec{b}=(-4;1;3),\ \vec{c}=(3;4;-2),\ \vec{d}=(3;-3;1).$

1.3.3 $\vec{a}=(1;2;1),\ \vec{b}=(2;-1;2),\ \vec{c}=(5;3;4),\ \vec{d}=(0;2;1).$

1.3.4 $\vec{a}=(1;5;3),\ \vec{b}=(-4;-2;2),\ \vec{c}=(3;5;2),\ \vec{d}=(3;7;2).$

1.3.5 $\vec{a}=(3;-1;2),\ \vec{b}=(-2;-1;5),\ \vec{c}=(2;3;-1),\ \vec{d}=(7;7;4).$

1.3.6 $\vec{a}=(4;3;2),\ \vec{b}=(2;-4;-3),\ \vec{c}=(4;5;5),\ \vec{d}=(6;-3;-4).$

1.3.7 $\vec{a}=(3;1;4),\ \vec{b}=(2;-1;3),\ \vec{c}=(-1;2;-1),\ \vec{d}=(4;5;7).$

1.3.8 $\vec{a}=(2;2;3),\ \vec{b}=(-3;-3;-2),\ \vec{c}=(-2;-1;-3),\ \vec{d}=(0;1;5).$

1.3.9 $\vec{a}=(1;4;3),\ \vec{b}=(1;-2;-1),\ \vec{c}=(-4;1;2),\ \vec{d}=(11;5;-1).$

1.3.10 $\vec{a}=(1;3;2),\ \vec{b}=(3;5;2),\ \vec{c}=(4;-3;1),\ \vec{d}=(9;4;3).$

1.3.11 $\vec{a}=(1;3;5),\ \vec{b}=(2;1;-2),\ \vec{c}=(5;4;-1),\ \vec{d}=(-6;3;20).$

1.3.12 $\vec{a}=(1;2;3),\ \vec{b}=(-2;-5;-7),\ \vec{c}=(3;2;4),\ \vec{d}=(3;1;3).$

1.3.13 $\vec{a}=(3;1;2),\ \vec{b}=(-5;2;-1),\ \vec{c}=(3;5;3),\ \vec{d}=(4;9;6).$

1.3.14 $\vec{a}=(2;3;5),\ \vec{b}=(-1;2;-2),\ \vec{c}=(2;3;1),\ \vec{d}=(1;5;11).$

1.3.15 $\vec{a}=(1;2;1),\ \vec{b}=(3;5;-1),\ \vec{c}=(2;-1;3),\ \vec{d}=(4;-1;10).$

1.3.16 $\vec{a}=(3;2;1),\ \vec{b}=(2;-3;-4),\ \vec{c}=(3;5;5),\ \vec{d}=(-4;3;4).$

1.3.17 $\vec{a}=(2;2;1),\ \vec{b}=(4;3;-1),\ \vec{c}=(1;-1;2),\ \vec{d}=(3;2;6).$

1.3.18 $\vec{a}=(1;3;2),\ \vec{b}=(2;-7;-3),\ \vec{c}=(-3;1;-2),\ \vec{d}=(4;9;5).$

1.3.19 $\vec{a}=(2;3;4),\ \vec{b}=(2;-1;-2),\ \vec{c}=(-5;2;1),\ \vec{d}=(3;6;5).$

1.3.20 $\vec{a}=(4;3;2),\ \vec{b}=(5;2;5),\ \vec{c}=(2;5;-3),\ \vec{d}=(-5;-9;3).$

1.3.21 $\vec{a}=(2;5;-4),\ \vec{b}=(-3;-2;1),\ \vec{c}=(1;-1;4),\ \vec{d}=(2;0;9).$

1.3.22 $\vec{a}=(1;-1;3),\ \vec{b}=(-1;-1;1),\ \vec{c}=(4;1;-1),\ \vec{d}=(15;4;-2).$

1.3.23 $\vec{a}=(1;2;-1),\ \vec{b}=(3;-1;1),\ \vec{c}=(-1;2;5),\ \vec{d}=(-8;10;-8).$

1.3.24 $\vec{a}=(3;-1;1),\ \vec{b}=(1;3;2),\ \vec{c}=(-1;1;5),\ \vec{d}=(-2;4;12).$

1.3.25 $\vec{a}=(1;-2;1),\ \vec{b}=(2;1;1),\ \vec{c}=(-5;3;-1),\ \vec{d}=(15;-14;4).$

1.3.26 $\vec{a}=(2;1;3),\ \vec{b}=(1;1;-1),\ \vec{c}=(3;-1;2),\ \vec{d}=(-6;4;1).$

1.3.27 $\vec{a}=(2;1;-1),\ \vec{b}=(3;1;2),\ \vec{c}=(4;1;-1),\ \vec{d}=(-11;-2;-1).$

1.3.28 $\vec{a}=(3;2;1),\ \vec{b}=(2;-1;2),\ \vec{c}=(1;2;-1),\ \vec{d}=(1;-1;3).$

1.3.29 $\vec{a}=(2;1;-1),\ \vec{b}=(-1;1;3),\ \vec{c}=(1;-1;2),\ \vec{d}=(1;11;7).$

1.3.30 $\vec{a}=(1;-5;7),\ \vec{b}=(5;3;1),\ \vec{c}=(-8;-2;-1),\ \vec{d}=(15;9;11).$

Завдання 1.4. Обчислити границі, не користуючись правилом Лопіталя.

1.4.1 а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-8}{4+3x-x^2}$.

1.4.2 а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{\arcsin 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^3+2x+2}{5x^2-4x-9}$.

1.4.3 а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-x^2}{\ln(1+2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3-4x}{-4x^3+3x^2-4}$.

1.4.4 а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7}}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tg\,x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x^2}{3-2x^2}\right)^{7-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^6-5x^5+2x-1}$.

1.4.5 а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{3x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-4}{2x^3-5x^2-3x+4}$.

1.4.6 а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin4x}{1-\cos8x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+5}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-3x+6}{x^2-7x-2}$.

1.4.7 а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x\cdot tg5x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2}\right)^{\frac{2x+1}{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{5x^6-x^3+2}$.

1.4.8 а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{x\cdot\arcsin3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4+9x^3-2x+1}{2x^2+x-6}$.

1.4.9 а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-6x-7}{\sqrt{x^2-3}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot tg5x}{1-\cos10x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{\frac{x+4}{7}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2+3x+2}{3x^2+2x-1}$.

1.4.10 а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-8x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot tg6x}{5\sin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^{2x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{-5x^3-x^2-3x+1}$.

1.4.11 а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^4-81}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos3x}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+5}{x^3-2}\right)^{x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7+x-2x^2}{2x^2+10x+5}$.

1.4.12 а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-7x-6}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{2x+3}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+3x-4}{3x^2+4x-7}$.

1.4.13 а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x+2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^4-x^3-3x+7}$.

1.4.14 а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+2x^2-1}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\cos2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+5}\right)^{\frac{x+2}{7}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-7x^3+6x}{x^2+2x-8}$.

1.4.15 а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{4-\sqrt{4x+8}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{tgx-\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-x}{5-x}\right)^{\frac{2x+1}{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-2}{x^3+8x^2+3x-1}$.

1.4.16 а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2-2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-10}{x^4-25x^3+6x-2}$.

1.4.17 а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+3x-4}{3x^2+4x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+7x+6}{\sqrt{5+x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{5-x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+2x^2-1}{x^5-2x+3}$.

1.4.18 а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{\frac{x^2+2}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x^3-7x+4}{x^3+9}$.

1.4.19 а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{2-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-7x-6}{x^2-3x-4}$.

1.4.20 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^4-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^2}-1}{\operatorname{arc}tg^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+4}\right)^{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2-9x+8}{x^4-8x+4}$.

1.4.21 а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{tg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{3-x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+6x-1}{6x^6-5x^4+4x}$.

1.4.22 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{\sqrt{7-x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^3}{6+x^3}\right)^{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{2x^3+5x^2-1}$.

1.4.23 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{e^{2x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)^{5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^6-2x^5+2x^3}{x^2-5x+6}$.

1.4.24 а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x\cdot\sin x}{\operatorname{arc}tg3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x-3}\right)^{\frac{6x^2-1}{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-8x+5}{3x^2+9x-6}$.

1.4.25 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{11+x}-2}{x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^2-3x}{x^2-5x}$.

1.4.26 а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\sin x^2}}{tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-7}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-4}{5x^3-1}$.

1.4.27 а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x-5}{2-\sqrt{3+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg4x^2}{\sqrt{1+8x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x}\right)^{\frac{2x+1}{5}}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-3}{8x^2-10x-3}$.

1.4.28 а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-4x}{x^3+3x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{6+x}-\sqrt{6}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x^2+3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-6}\right)^{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5+3x-6}{3x^5+5x-3}$.

1.4.29 а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}{2x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-3^x}{\sin^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-5}\right)^{3-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+7x+3}$.

1.4.30 а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(2x+1)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+2}{x^3+2x^2+x-2}$.

Завдання 1.5. Знайти похідні функцій.

1.5.1 а) $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)$; б) $\begin{cases}x=2t-\sin 2t;\\ y=\sin^3 t;\end{cases}$;

в) $y=(ctg4x)^x$; г) $x=y^2+arctg(xy)$.

1.5.2 а) $y=\sqrt{4-x^2}-4\arccos\dfrac{x}{2}$; б) $\begin{cases}x=e^{-t};\\ y=e^{-2t};\end{cases}$; в) $y=(\cos 2x)^{\sin x}$; г) $\ln(y-x)=yx^2$.

1.5.3 а) $y=\dfrac{1}{2}ctg^2x+\ln\sin x$; б) $\begin{cases}x=e^t+t;\\ y=\sqrt{t};\end{cases}$; в) $y=(tgx)^{\arcsin x}$; г) $7^x+7^y=7^{x+y}$.

1.5.4 а) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{3+2x}\right)$; б) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\cos t};\\ y=2tgt;\end{cases}$; в) $y=(\cos 3x)^{2x+1}$; г) $e^y\cdot\sin x=e^{-x}\cdot\cos y$.

1.5.5 а) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}; \\ y=\sqrt[3]{t}; \end{cases}$; в) $y=(x^3+4)^{\sin 2x}$; г) $y\cdot\sin x-\cos(x-y)=0$.

1.5.6 а) $y=\sqrt{ctgx}-\frac{1}{3}\sqrt{tg^3x}$; б) $\begin{cases} x=tgt; \\ y=t^2+t; \end{cases}$; в) $y=x^{\arccos x}$;

г) $\ln x+e^{\frac{y}{x}}=e$.

1.5.7 а) $y=arctg\sqrt{1-e^{-x^3}}$; б) $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\sin 2t; \\ y=\cos^3 t; \end{cases}$; в) $y=(\ln 2x)^{\frac{x}{2}}$;

г) $x^2+y^2=\ln y$.

1.5.8 а) $y=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$;б) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2); \\ y=t+arctgt; \end{cases}$; в) $y=(x+5)^{\cos 2x}$; г) $\ln(y-x)=y\cdot x^2$.

1.5.9 а) $y=\ln tg\frac{x}{2}-\arcsin\frac{x}{2}$;б) $\begin{cases} x=\cos^2 t; \\ y=\ln\sin t; \end{cases}$; в) $y=(ctgx)^{\sqrt{x}}$;

г) $y\cdot\ln y=x^3$.

1.5.10 а) $y=tg^2\frac{x}{2}+\arcsin\sqrt{1-x^2}$; б) $\begin{cases} x=1-t^2; \\ y=t-t^3; \end{cases}$;

в) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$; г) $x+y+\sqrt{xy}=10$.

1.5.11 а) $y=\frac{2}{3}\sqrt{\left(arctg\,e^x\right)^3}$;б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}; \\ y=(t+1)^2; \end{cases}$; в) $y=(1-x^2)^{\arccos x}$; г) $\frac{y}{x}=e^y$.

1.5.12 а) $y=\sqrt{1+\ln^2\frac{x}{2}}$; б) $\begin{cases} x=\ln 2t; \\ y=\sin 4t; \end{cases}$; в) $y=(\ln x)^{ctg 2x}$; г) $\sin(xy)+\cos(xy)=tg(xy)$.

1.5.13 а) $y=\log_4\log_2 tg\,x$;б) $\begin{cases} x=5^t+1; \\ y=10^t-4; \end{cases}$; в) $y=(x^2+2)^{\cos 3x}$;

г) $2y\ln y=x$.

1.5.14 а) $y=arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right)$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}; \\ y=(t+1)^2; \end{cases}$; в) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

г) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

1.5.15 а) $y=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-arctg\,e^{x}$;б) $\begin{cases} x=ctg2t; \\ y=3-2t; \end{cases}$;

в) $y=(x^2-1)^x$; г) $e^{x+y}=xy$.

1.5.16 а) $y=\log_2\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$;б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}; \\ y=e^t; \end{cases}$; в) $y=(2x+3)^{\sqrt{x-1}}$; г) $e^y=x+y$.

1.5.17 а) $y=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}; \\ y=\arccos t; \end{cases}$; в) $y=(arctgx)^{\ln x}$;

г) $y^3=\frac{x-y}{x+y}$.

1.5.18 а) $y=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$;б) $\begin{cases} x=3\cos 2t; \\ y=\sin 2t; \end{cases}$; в) $y=(x^2+5x)^{\sqrt{x}}$;

г) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=1$.

1.5.19 а) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{1+2tg^2x}$;б) $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1-\cos 2t; \end{cases}$; в) $y=x^{\ln x}$;

г) $xy=arctg\frac{x}{y}$.

1.5.20 а) $y=\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$; б) $\begin{cases} x=\sin 5t; \\ y=t-\cos t; \end{cases}$; в) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$; г) $tgy=xy$.

1.5.21 а) $y=\ln tg\frac{x}{2}-\cos\ln tg\,x$; б) $\begin{cases} x=\ln(1+t^3); \\ y=t-arctgt; \end{cases}$ в) $y=(\sqrt{x})^{\sqrt[4]{x}}$; г) $y=1+xe^y$.

1.5.22 а) $y=arctg\left(e^x-e^{-x}\right)$;б) $\begin{cases} x=t^2+1; \\ y=\ln(t+1); \end{cases}$; в) $y=x^{\sqrt{x^2-1}}$; г) $\cos(xy)=x$.

1.5.23 а) $y=\cos^2\left(\sin e^{3x}\right)$;б) $\begin{cases} x=ctg2t; \\ y=\ln(\sin 2t); \end{cases}$; в) $y=(tgx)^{\cos x}$; г) $\sqrt{y}+e^{x\sqrt{y}}=5$.

1.5.24 а) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$; б) $\begin{cases} x=arctg\frac{1}{t}; \\ y=e^t; \end{cases}$; в) $y=(\arcsin 2x)^{\ln x}$; г) $y^2=x\sin y$.

1.5.25 а) $y=3^{\sqrt{tg^3x}}$;б) $\begin{cases} x=\sin^2 t; \\ y=\cos t^2; \end{cases}$; в) $y=(arctgx)^{x^2+1}$; г) $y+\sqrt{x}\ln y=1$.

1.5.26 а) $y = arctg\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$; б) $\begin{cases} x = \sin 3x - x; \\ y = 2x + \cos x; \end{cases}$; в) $y = (\sqrt{x^2+2x})^x$; г) $y = \cos(x^2+y)$.

1.5.27 а) $y = \frac{1}{2} arctg \frac{e^x-3}{2}$;б) $\begin{cases} x = e^t + \sin t; \\ y = ctg(t+1); \end{cases}$; в) $y = (x^3+2)^{\ln x}$; г) $\ln y = \sin(xy)$.

1.5.28 а) $y = \ln^2(x+\cos x)$; б) $\begin{cases} x = \sqrt{3t}; \\ y = \ln t; \end{cases}$; в) $y = x^{2^x}$; г) $e^y x - \sin x = y$.

1.5.29 а) $y = \ln \ln^2 \ln^3 x$;б) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \dfrac{1}{\cos t}; \end{cases}$; в) $y = x^{-tgx}$; г) $tgy + e^y = x$.

1.5.30 а) $y = \sqrt{2^x-1} - arctg\sqrt{2^x-1}$;б) $\begin{cases} x = e^{-t} + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$; в) $y = (x^2+3)^{\sqrt{x}}$; г) $\ln y + \cos(xy) = x$.

Завдання 1.6. Дослідити функції та побудувати їх графіки.

1.6.1 а) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$; б) $y = x^3 \cdot e^{-x}$.

1.6.2 а) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y = (x-1) \cdot e^{1-x}$.

1.6.3 а) $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$.

1.6.4 а) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$; б) $y = \ln(2x^2+3)$.

1.6.5 а) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

1.6.6 а) $y = \frac{4x^2}{3-x}$; б) $y = (x-1)^2 \cdot e^x$.

1.6.7 а) $y = \frac{x^3}{x^2-4}$; б) $y = x\sqrt{x+3}$.

1.6.8 а) $y = \frac{x^2-1}{x^2+4}$; б) $y = (3-x) \cdot e^{x-2}$.

1.6.9 а) $y = \frac{4-x^2}{1-x}$; б) $y = x^2 \cdot \ln x$.

1.6.10 а) $y=\frac{x}{x^2-1}$; б) $y=\ln(x^2+2x+2)$.

1.6.11 а) $y=\frac{x^2-2}{x-1}$; б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1.6.12 а) $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

1.6.13 а) $y=\frac{2x^2+1}{x-1}$; б) $y=\frac{x}{\ln x}$.

1.6.14 а) $y=\frac{2x}{x^2+1}$; б) $y=(x+4)\cdot e^{2x}$.

1.6.15 а) $y=\frac{4x^2}{x^2+3}$; б) $y=\frac{e^x}{1+x}$.

1.6.16 а) $y=\frac{x^2}{2(x-1)}$; б) $y=(x-3)\sqrt{x}$.

1.6.17 а) $y=\frac{2x}{x^3-8}$; б) $y=\frac{1}{e^x-1}$.

1.6.18 а) $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$; б) $y=\ln(9+x^2)$.

1.6.19 а) $y=\frac{x}{1+x^2}$; б) $y=\frac{e^x}{x}$.

1.6.20 а) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$; б) $y=\ln x-\frac{1}{2}x^2$.

1.6.21 а) $y=\frac{5x}{x^2-4}$; б) $y=x^2\cdot\ln x$.

1.6.22 а) $y=\frac{1}{1-x^2}$; б) $y=2x^2-\ln x$.

1.6.23 а) $y=\frac{x^2-1}{x^2+4}$; б) $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

1.6.24 а) $y=\frac{x^2}{x^3+8}$; б) $y=\ln\frac{x+1}{x-2}$.

1.6.25 а) $y=\frac{1}{x}+4x^2$; б) $y=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

1.6.26 а) $y=\frac{x^3}{x-1}$; б) $y=x-\ln x$.

1.6.27 а) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; б) $y=\frac{x}{2}-arctgx$.

1.6.28 а) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=x-\ln(x+1)$.

1.6.29 а) $y=\frac{x}{x^2-4}$; б) $y=e^{4x-x^2}$.

1.6.30 а) $y=\frac{x^3-4}{x^2}$; б) $y=x\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Завдання 1.7. Функції попиту q та пропозиції s від ціни p виражаються рівняннями $q=q(p),\ s=s(p).$ Знайти:

а) ціну рівноваги;

б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни.

1.7.1 $q=1400-5p,\ s=1100+5p.$

1.7.2 $q=10-p+2\sqrt{p},\ s=4p-6.$

1.7.3 $q=1300-4p,\ s=1000+2p.$

1.7.4 $q=20-p+6\sqrt{p},\ s=2p-25.$

1.7.5 $q=2000-20p,\ s=200+10p.$

1.7.6 $q=12-3p+2\sqrt{p},\ s=2p-4.$

1.7.7 $q=1100-10p,\ s=800+20p.$

1.7.8 $q=7-2p+4\sqrt{p},\ s=2p-1.$

1.7.9 $q=1000-5p,\ s=800+5p.$

1.7.10 $q=8-p,\ s=p+2.$

1.7.11 $q=1500-30p,\ s=500+20p.$

1.7.12 $q = 9 - 3p + 2\sqrt{p}, \ \ s = 2p - 7.$

1.7.13 $q = 2100 - 40p, \ \ s = 1100 + 60p.$

1.7.14 $q = 15 - 2p, \ \ s = p + 6.$

1.7.15 $q = 1400 - 10p, \ \ s = 200 + 20p.$

1.7.16 $q = 30 - 2p + 6\sqrt{p}, \ \ s = p - 15.$

1.7.17 $q = 1800 - 5p, \ \ s = 1700 + 5p.$

1.7.18 $q = 25 - 5p + 4\sqrt{p}, \ \ s = 5p - 7.$

1.7.19 $q = 1200 - 30p, \ \ s = 800 + 10p.$

1.7.20 $q = 12 - p, \ \ s = p + 2.$

1.7.21 $q = 1300 - 2p, \ \ s = 900 + 2p.$

1.7.22 $q = 1 - 2p + 4\sqrt{p}, \ \ s = 2p - 7.$

1.7.23 $q = 700 - 8p, \ \ s = 100 + 2p.$

1.7.24 $q = 9 - 2p, \ \ s = p + 3.$

1.7.25 $q = 900 - 20p, \ \ s = 300 + 10p.$

1.7.26 $q = 18 - 6p + 4\sqrt{p}, \ \ s = 4p - 14.$

1.7.26.27 $q = 1200 - 5p, \ \ s = 700 + 5p.$

1.7.28 $q = 30 - 5p, \ \ s = p + 6.$

1.7.29 $q = 2300 - 40p, \ \ s = 1800 + 10p.$

1.7.30 $q = 25 - p + 6\sqrt{p}, \ \ s = 2p - 20.$

Завдання 1.8. Дослідити на екстремум функцію $z = f(x, y)$**.**

1.8.1. $z = 3x^2 - 5xy + 4y^2 - 7x - y + 1$.	**1.8.2.** $z = 2x^2 - 3xy + 5y^2 - 2x - y + 5$.

1.8.3. $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.	**1.8.4.** $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.
1.8.5. $z=5x^2-7xy+9y^2-x-y+1$.	**1.8.6.** $z=6x^2-8xy+5y^2+2x+y+3$.
1.8.7. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.	**1.8.8.** $z=6x^2+4xy+3y^2-x-y+1$.
1.8.9. $z=3x^2-5xy+8y^2-x-2y+1$.	**1.8.10.** $z=5x^2-6xy+9y^2-x-y+3$.
1.8.11. $z=4x^2-3xy+5y^2-x+y-2$.	**1.8.12.** $z=4x^2-6xy+7y^2-7x-y+1$.
1.8.13. $z=x^2-2xy+7y^2-x-y$.	**1.8.14.** $z=8x^2-3xy+y^2-x+5y-1$.
1.8.15. $z=5x+y-x^2-xy+y^2+1$.	**1.8.16.** $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+5$.
1.8.17. $z=3x^2+xy+4y^2-x-2y$.	**1.8.18.** $z=3x+6y-x^2-xy+y^2$.
1.8.19. $z=x^2-xy+3y^2+2x-y+5$.	**1.8.20.** $z=5x^2-6xy+3y^2-x-y+1$.
1.8.21. $z=4x^2-3xy+5y^2-2x+y$.	**1.8.22.** $z=5x^2-xy+y^2-x-2y-1$.
1.8.23. $z=4x^2-3xy+2y^2-x+3y$.	**1.8.24.** $z=7x^2-2xy+3y^2+x+y+5$.
1.8.25.	**1.8.26.**

$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - y + 1$.	$z = 5x^2 - xy + y^2 - x - y - 1$.
1.8.27. $z = x^2 - xy + 7y^2 + 5x + y + 1$.	**1.8.28.** $z = 6x^2 - 3xy + y^2 - x - y + 1$.
1.8.29. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 3$.	**1.8.30.** $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5y + 2$.

4.4.3 Контрольна робота по темі кратний інтеграл

Варіант 1

1. Обчислити подвійний інтеграл

А) $\iint\limits_D ye^{xy/2}\,dxdy$; D: $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=2$, $x=4$.

Б) $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)\,dxdy$; D: $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^2$.

2. Обчислити потрійний інтеграл:

$\iiint\limits_G xy\,dxdydz$; G: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

3. Знайти довжину дуги Γ: $\rho=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $\varphi\in[0;3\pi]$.

4. Перевірити, чи залежить інтеграл $\int\limits_{AB}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ від форми кривої в області $x<0$, $y>0$.

Варіант 2

1. Обчислити подвійний інтеграл:

А) $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\,dxdy$; D: $y=\pi/4$, $y=\pi/2$, $x=1$, $x=2$.

Б) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}\,dxdy$; D: $x=0$, $y=2$, $y=x/2$.

2. Обчислити потрійний інтеграл:

$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dxdydz$; G: $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$.

3. Обчислити масу кривої $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\,\mathrm{arctg}\,t-t$, $t\in[0;1]$, якщо її густина $\mu=y/e^x$.

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,dx+dy$ по верхньому півколу $x^2+y^2=25$ від точки $A(-5,0)$ до точки $B(5,0)$.

Список літератури до розділу

1] Р. М. Літнарович, Алгебра матриць, Рівне, 2007.

2] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва: Наука, 1967.

3] А. І. Єрмаков та М. М. Крамар, Лінійна алгебра. Навчальний посібник, Луганськ: СУДУ, 2000.

4] В. В. Булдигін, І. В. Алексєєва та В. О. Гайдей, Лінійна алгебра та аналітична геометрія, 2011: ТВіМС, Київ.

5] В. Михайлев, «Ранг матрицы: определение, методы нахождения, примеры, решения.,» [В Интернете]. Available: http://www.cleverstudents.ru/matrix/rank.html. [Дата обращения: 25 03 2016].

6] . В. Єфіменко, «Вища математика,» 2011. [З мережі]. Available: http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/downloads/courses/vyshka/algebra.pdf. [Дата звернення: 24 03 2016].

7] Landi, Giovanni, Zampini, Alessandro. Linear Algebra and Analytic Geometry for Physical Sciences // Landi, Giovanni, Zampini, Alessandro. - Springer International Publishing. 2018 - ISBN 978-3-319-78360-4. – 332 p.

8. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973 – 144 с.
9. Калужнін Л.А. Гіперкомплексні числа// У світі математики. – К.: Рад. шк., 1977. – Вип. 8. – с. 99-112.
10. Гусак А.А. В мире чисел. – Минск: Народная асвета, 1987. – с. 113-132.
11. Понтрягин Л.С. Обобщение чисел. – М.: Наука, 1986. – 120 с.

12. Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи. – К.: Вища школа, 1988. – 271 с.
13. Нечаев В.И. Числовые системы. – М.: Просвещение, 1975. – 199 с.
14. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа – М.: Наука, 1971. – 440 с.
15. Гонин Е.Г. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1959. – 232 с.
16. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 274 с.
17. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – Ч 2. – К.: Вища школа, 1974. – 464 с.
18. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев Геометрия. - М.: " Наука", - 1990. 671с.
19. К.Г.Валєєв, І.А.Джалладова Вища математика. Частина 1. - К.: - 2001. 546с.
20. В.П.Дубовик, І.І.Юрик Вища математика. - К.: - 2001. 648с.
21. В.Е.Шнейдер, А.И.Слуцкий, А.С.Шумов Краткий курс высшей математики. - М.: " Высшая школа", - 1972. 640с.
22. И.И.Привалов Аналитическая геометрия. Издание тридцатое. - М.: " Наука",-1966. 372с.
23. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. - М.: " Высшая школа", - 1986. 304с.
24. В.Ю.Клепко, В.Л.Голець „Вища математика в прикладах і задачах" К. 2006.
25. Под редакцией Н.И.Кремера «Высшая математика для экономистов.» М. 2000.
26. Под редакцией В.И.Ермакова «Общий курс высшей математики для экономистов» М. 2000.
27. Под редакцией В.И.Ермакова «Сборник задач по высшей математики для экономистов» М. 2002.
28. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів" (теорія) К. 2005.
29. В.В.Барковський, Н.В.Барковська „Вища математика для економістів" (практика) К. 2005